CHAPITRE 1 : Raisonnement par récurrence, suites et fonctions

[1 Les suites numériques (rappel de première) 4](#_Toc458518348)

[1.1 Généralités 4](#_Toc458518349)

[1.2 Plusieurs méthodes pour générer une suite 4](#_Toc458518350)

[2 Exemples d’algorithmes permettant d’obtenir des termes d’une suite (rappel de première) 5](#_Toc458518351)

[3 Suites arithmétiques (rappel de première) 6](#_Toc458518352)

[3.1 Définition par une relation de récurrence 6](#_Toc458518353)

[3.2 Définition en fonction de *n* à partir de *U*0 6](#_Toc458518354)

[3.3 Définition en fonction de *n* à partir d’un terme *Up* 6](#_Toc458518355)

[3.4 Somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique 7](#_Toc458518356)

[4 Suites géométriques (rappel de première) 8](#_Toc458518357)

[4.1 Définition par une relation de récurrence 8](#_Toc458518358)

[4.2 Définition en fonction de *n* à partir de *U*0 8](#_Toc458518359)

[4.3 Définition en fonction de *n* à partir d’un terme *Up* 9](#_Toc458518360)

[4.4 Somme de termes consécutifs d’une suite géométrique 9](#_Toc458518361)

[5 Raisonnement par récurrence 10](#_Toc458518362)

[5.1 Le principe 10](#_Toc458518363)

[5.2 Exemples 10](#_Toc458518364)

[6 Sens de variation d’une suite 12](#_Toc458518365)

[6.1 Suite croissante 12](#_Toc458518366)

[6.2 Suite décroissante 12](#_Toc458518367)

[6.3 Suite constante 13](#_Toc458518368)

[6.4 Suite monotone 13](#_Toc458518369)

[6.5 Méthodes pour étudier le sens de variation d’une suite 13](#_Toc458518370)

[6.5.1 Etudier le signe de *un+1* – *un* pour tout entier naturel *n*. 13](#_Toc458518371)

[6.5.2 Etudier le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[ 14](#_Toc458518372)

[6.5.3 Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer un+1 / un avec 1 16](#_Toc458518373)

[6.5.4 Utiliser un raisonnement par récurrence 18](#_Toc458518374)

[7 Suites majorées, minorées, bornées 19](#_Toc458518375)

[7.1 Suites majorées 19](#_Toc458518376)

[7.2 Suites minorées 19](#_Toc458518377)

[7.3 Suites bornées 19](#_Toc458518378)

[7.4 Méthodes pour étudier la majoration ou la minoration d’une suite 20](#_Toc458518379)

[7.4.1 Etudier le signe de *un – M* (ou de *un – m*) 20](#_Toc458518380)

[7.4.2 Chercher un encadrement de *un* en travaillant sur des inégalités. 21](#_Toc458518381)

[7.4.3 Etudier le sens de variation de la suite (*un*) 21](#_Toc458518382)

[7.4.4 Utiliser un raisonnement par récurrence. 22](#_Toc458518383)

[8 Limite d’une suite 23](#_Toc458518384)

[8.1 Limite finie 23](#_Toc458518385)

[8.2 Limite infinie 23](#_Toc458518386)

[8.3 Pas de limite 24](#_Toc458518387)

[8.4 Vocabulaire 25](#_Toc458518388)

[8.5 Propriétés 25](#_Toc458518389)

[9 Théorèmes généraux sur les limites de suites 27](#_Toc458518390)

[9.1.1 Limite d’une somme de suites 27](#_Toc458518391)

[9.1.2 Limite d’un produit de suites 27](#_Toc458518392)

[9.1.3 Limite d’un quotient de suites 27](#_Toc458518393)

[9.1.4 Cas d’indétermination 28](#_Toc458518394)

[9.1.5 Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction polynôme 28](#_Toc458518395)

[9.1.6 Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction rationnelle 28](#_Toc458518396)

[9.2 D’autres théorèmes pour trouver une limite de suite 29](#_Toc458518397)

[9.2.1 Théorème de comparaison pour prouver qu’une suite a comme limite 29](#_Toc458518398)

[9.2.2 Théorème de comparaison pour prouver qu’une suite a comme limite -∞ 30](#_Toc458518399)

[9.2.3 Théorème des gendarmes pour prouver qu’une suite a pour limite *l* 30](#_Toc458518400)

[9.3 Remarque 31](#_Toc458518401)

[9.4 Théorème de la convergence d’une suite monotone (admis) 32](#_Toc458518402)

[9.5 Propriété : Suite croissante de limite *l* 33](#_Toc458518403)

[9.6 Théorème : suite croissante non majorée 34](#_Toc458518404)

[9.7 Limite d’une suite de terme général *qn* 34](#_Toc458518405)

[10 Limite d’une fonction 36](#_Toc458518406)

[10.1 Limite finie *l* en ou 36](#_Toc458518407)

[10.2 Limite infinie en +∞ 36](#_Toc458518408)

[10.3 Limite infinie en -∞ 37](#_Toc458518409)

[10.4 Pas de limite en + ∞ 38](#_Toc458518410)

[10.5 Limite finie *l* en un réel *a* 38](#_Toc458518411)

[10.6 Limite +∞ en un réel *a* 39](#_Toc458518412)

[10.7 Pas de limite en *a* 39](#_Toc458518413)

[10.8 Théorèmes généraux. 39](#_Toc458518414)

[10.8.1 Limite d’une somme. 40](#_Toc458518415)

[10.8.2 Limite d’un produit. 40](#_Toc458518416)

[10.8.3 Limite d’un quotient. 40](#_Toc458518417)

[10.9 Théorème des gendarmes (admis) 40](#_Toc458518418)

[10.10 Théorème de comparaison (admis) 41](#_Toc458518419)

[10.11 Limites et composées 41](#_Toc458518420)

[10.11.1 Composée de deux fonctions 41](#_Toc458518421)

[10.11.2 Composée d’une suite et d’une fonction 41](#_Toc458518422)

[11 Asymptotes. 41](#_Toc458518423)

[11.1 Asymptote parallèle à l’axe des ordonnées (asymptote verticale). 41](#_Toc458518424)

[11.2 Asymptote parallèle à l’axe des abscisses (asymptote horizontale). 41](#_Toc458518425)

CHAPITRE 1 : Raisonnement par récurrence, suites et fonctions

# Les suites numériques (rappel de première)

## Généralités

* Une suite de nombres réels est une fonction où la variable  est un entier naturel.
* L’image par la suite d’un entier naturel est notée et se lit « U indice n » ou « U n »
* peut exister pour tout entier naturel ou pour seulement certains entiers naturels .
* est le terme général de la suite. C’est un nombre réel.
* L’entier est le **rang** du terme

## Plusieurs méthodes pour générer une suite

* Le terme général de la suite peut être défini au moyen d’une **fonction de variable** .

***Exemple :***

La suite définie pour tout par :.

Dans cet exemple, on a

avec comme fonction la fonction racine carrée.

* Le terme général de la suite peut être défini au moyen d’une **relation de récurrence** qui donne le terme suivant en fonction du terme (ou des termes) précédent et parfois aussi de .

***Exemple :***

La suite définie par : .

Dans cet exemple, on a

avec comme fonction la fonction racine carrée.

***Remarque :***

On aurait tout aussi bien pu définir la suite de l’exemple précédent en écrivant :

La suite définie pour tout par : .

# Exemples d’algorithmes permettant d’obtenir des termes d’une suite (rappel de première)

* Une boucle **Pour** permet de répéter un groupe d’instructions un nombre déterminé de fois

***Exemple :***

Soit la suite définie pour tout par :. Calculer et afficher les N premiers termes de cette suite où N est un entier choisi par l’utilisateur.

*Réponse*

***Déclaration des variables***

U est un réel

I et N sont des entiers

Début algorithme

Saisir N

Pour I allant de 0 à N-1

U prend la valeur

Afficher U

Fin Pour

Fin algorithme

* Une boucle **Tant que** permet de répéter un groupe d’instructions autant de fois que nécessaire, ce nombre de fois n’étant pas connu à l’avance.

***Exemple :***

Soit la suite définie pour tout par :

La suite définie par : .

Calculer et afficher le premier terme de cette suite qui est strictement inférieur à .

*Réponse*

***Déclaration des variables***

U est un réel

I et N sont des entiers

Début algorithme

U prend la valeur 4

Tant que U

U prend la valeur

Fin Tant que

Afficher U

Fin algorithme

# Suites arithmétiques (rappel de première)

## Définition par une relation de récurrence

Une suite est **arithmétique** si :

Pour tout  :

 est un réel constant appelé la **raison** de la suite arithmétique.

***Exemple :***

Un capital de 100 € est placé au début de l’année sur un compte rémunéré avec un taux annuel d’intérêts simples de . Cela veut dire que chaque année, le montant des intérêts est le même et vaut 20 % du montant initial c'est-à-dire .

On note la somme sur le compte au début de l’année . La somme au début de l’année est . La somme au début de l’année est etc.



## Définition en fonction de *n* à partir de *U*0

Le terme général d’une suite arithmétique de premier terme et de raison s’exprime par :

Pour tout  :

***Exemple :*** Pour tout  : . Donc,

Cette formule en fonction de permet de calculer directement .

## Définition en fonction de *n* à partir d’un terme *Up*

Le terme général d’une suite arithmétique de premier terme et de raison s’exprime par :

Pour tout  , avec :

Exemple avec  . Pour tout  , avec :

***Exemple :***

On reprend les montants annuels sur compte rémunéré à intérêts simples de 20%, mais en notant le premier terme.



Pour tout  : .

Cette formule en fonction de permet de calculer directement .

## Somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique

La somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique est :

***Exemple avec la suite de l’exemple précédent***

Calculer

*C’est la somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique de raison*

***![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\KWA5DCV8\MC900411320[1].wmf]()Exemple à retenir : la somme des entiers naturels de à***

Calculer *.*

*C’est la somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique de raison*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ou encore : |  |  |

# Suites géométriques (rappel de première)

## Définition par une relation de récurrence

Une suite est **géométrique** si :

Pour tout  :

 est un réel différent de et de , constant, appelé la **raison** de la suite géométrique.

***Exemple :***

Un capital de 100 € est placé au début de l’année sur un compte rémunéré avec un taux annuel d’intérêts composés de . Cela veut dire que chaque année, le montant des intérêts vaut 20 % du montant de l’année précédente.

On note la somme sur le compte au début de l’année . La somme au début de l’année est . La somme au début de l’année est etc.



## Définition en fonction de *n* à partir de *U*0

Le terme général d’une suite géométrique de premier terme et de raison s’exprime par :

Pour tout  :

***Exemple :***

Pour tout  : .

Cette formule en fonction de permet de calculer directement .

## Définition en fonction de *n* à partir d’un terme *Up*

Le terme général d’une suite géométrique de premier terme et de raison s’exprime par :

Pour tout  , avec :

Exemple avec  :

Pour tout  , avec :

***Exemple :***

On reprend les montants annuels sur compte rémunéré à intérêts simples de 20 %, mais en notant le premier terme.



Pour tout  : .

Cette formule en fonction de permet de calculer directement .

## Somme de termes consécutifs d’une suite géométrique

La somme de termes consécutifs d’une suite géométrique est :

***Exemple avec la suite de l’exemple précédent***

Calculer

*C’est la somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique de raison*

***![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\KWA5DCV8\MC900411320[1].wmf]()Exemple à retenir : la somme des puissances entières d’un réel q différent de 1***

Calculer

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ou encore : |  |  |

# Raisonnement par récurrence

## Le principe

*Image de l’échelle : Si je peux mettre* *le* *pied sur le barreau numéro de* *l’échelle ( est un entier naturel donné )* ***et*** *si je peux passer de n’importe quel barreau numéro* () *au barreau suivant numéro alors je peux gravir toute l’échelle à partir du barreau numéro .*

 désigne une proposition[[1]](#footnote-1) qui dépend d’un entier naturel . Soit un entier naturel.
Pour démontrer par récurrence que pour tout entier naturel , la proposition est vraie, on procède en trois étapes :

1. **Initialisation :** Vérifier que la proposition est vraie au rang .
2. **Hérédité :** On suppose que la proposition est vraie pour un entier . On montre qu’alors la proposition est vraie pour l’entier suivant .
3. **Conclusion :** la proposition est vraie pour tout entier .

## Exemples

***Exemple 1 :*** ***Une suite est définie par récurrence. On veut sa définition par une fonction de* .**

Soit la suite définie pour tout entier par :

Montrer que le terme général de la suite s’écrit pour tout entier .

*Réponse*

Soit la proposition  : «  pour tout entier  »

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

D’une part, on sait que .

D’autre part, la proposition pour donne

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que .
* On cherche à exprimer .

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* En utilisant l’hypothèse de récurrence[[2]](#footnote-2), on a :
* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie pour tout entier .

***Exemple 2 :*** ***On veut démontrer qu’une inégalité est vraie pour tout entier naturel* .**

Montrer par récurrence que l’inégalité est vraie pour tout entier .

*Réponse*

Soit la proposition  : «  pour tout entier  »

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

D’une part, on sait que .

D’autre part,

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que .

Etablissons d’abord un résultat préliminaire : pour tout entier naturel

Cela revient à montrer que : pour tout entier naturel

Etudions le signe du polynôme

 donc il y a deux racines réelles distinctes :

D’où le tableau de signes :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Or,

donc pour tout entier naturel

d’où le résultat préliminaire : pour tout entier naturel

On peut maintenant démontrer l’hérédité :

* On cherche à exprimer .
* En utilisant l’hypothèse de récurrence, on a :

Puisque, d’après le résultat préliminaire, alors on a :

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie pour tout entier .

# Sens de variation d’une suite

## Suite croissante

***Définition :***

La suite est croissante si, pour tout , .

Exemple de suite ***croissante***

La suite définie pour tout par :

## Suite décroissante

***Définition :***

La suite est décroissante si, pour tout , .

Exemple de suite ***décroissante***

La suite définie pour tout par :

## Suite constante

***Définition :***

La suite est constante si, pour tout , .



Exemple de suite ***constante***

La suite définie pour tout par :

## Suite monotone

***Définition :***

Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante, autrement dit, si elle ne change pas de sens de variation.



Exemple de suite ***non monotone***

La suite définie pour tout par :

## Méthodes pour étudier le sens de variation d’une suite

Pour étudier le sens de variation d’une suite , on peut :

### Etudier le signe de *un+1* – *un* pour tout entier naturel *n*.

Le signe de la différence donne le sens de variation de la suite .

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout par :

*Réponse :*

Pour étudier le signe de cette expression, on la met sous la forme de produits et de quotients de facteurs :

 donc

Conclusion :

La suite est monotone croissante.

***Remarque :***

Cette méthode peut être utilisée pour les suites définies par une fonction de ou pour les suites définies par récurrence.

### Etudier le sens de variation de la fonction *f* sur [0 ; +∞[

**Si la suite est définie au moyen d’une** **fonction de variable** , alors le sens de variation de la suite est le même que celui de la fonction.

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout par :

*Réponse :*

 en posant la fonction définie sur par .

 est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur et le dénominateur ne s’annule pas sur , donc est dérivable sir .

Pour tout , . Donc la fonction est croissante.



Conclusion :

La suite est monotone croissante

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() **Si la suite est définie au moyen d’une** **relation de récurrence** cette méthode ne peut pas être utilisée.

***Exemple :***

Les suites et définies pour tout respectivement par :

 et

ont-elles le même sens de variation ?

*Réponse*

En calculant les premiers termes de , on a :



En calculant les premiers termes de , on a :



Conclusion : Bien que les deux suites et soient définies en utilisant la même fonction racine carrée (strictement croissante sur ), elles n’ont pas le même sens de variation.

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() Donc le sens de variation d’une suite définie par n’est pas toujours le même que le sens de variation de la fonction .

### Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer un+1 / un avec 1

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite :

* On montre d’abord que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Soit la proposition  : «  pour tout

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que .

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que .
* On cherche à exprimer .

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* En utilisant l’hypothèse de récurrence[[3]](#footnote-3), on a :

Or

Donc

D’où

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie pour tout entier .
* Comparons maintenant et

Puisqu’on a démontré *au préalable* que quel que soit , on a :

(L’ordre est conservé lorsqu’on multiplie ou divise les deux membres d’une inégalité par un réel strictement positif)

Conclusion : La suite est monotone croissante

![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\E763WEUX\MC900411320[1].wmf]() ***Remarque***

Par cette même méthode, on peut montrer que tout suite géométrique de **premier terme strictement positif** est :

* Monotone croissante lorsque
* Monotone décroissante lorsque

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

### Utiliser un raisonnement par récurrence

Pour utiliser la récurrence, on doit d’abord conjecturer le sens de variation.

***Exemple :***

Etudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel par :

*Réponse*

* On calcule pour pouvoir conjecturer le sens de variation de la suite.

Donc on conjecture la suite est monotone croissante.

* Démonstration par récurrence du sens de variation

Soit la proposition , .

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que  et que .

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que

Ou encore que

* On cherche à exprimer et en fonction, respectivement de et

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

et d’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a aussi : c'est-à-dire

* En utilisant l’hypothèse de récurrence, on a :

Or la fonction carrée est strictement croissante sur et puisque[[4]](#footnote-4) ,

Donc

D’où

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : , est vraie pour tout entier .

Conclusion : La suite est monotone croissante.

# Suites majorées, minorées, bornées

## Suites majorées

***Définition :***

La suite est **majorée** s’il existe un réel , tel que pour tout , .



***Exemple de suite*** ***majorée***

La suite définie pour tout par :

est majorée par

## Suites minorées

***Définition :***

La suite est **minorée** s’il existe un réel , tel que pour tout , .



***Exemple de suite*** ***minorée***

La suite définie pour tout par :

est minorée par

## Suites bornées

***Définition :***

La suite est **bornée** s’il existe des réels , tels que pour tout , .

Une suite est bornée lorsqu’elle est à la fois majorée et minorée.



***Exemple de suite*** ***bornée***

La suite définie pour tout par :

est bornée par et

## Méthodes pour étudier la majoration ou la minoration d’une suite

Pour démontrer qu’une suite est majorée par ou minorée par ou bornée , on peut :

### Etudier le signe de *un – M* (ou de *un – m*)

***Exemple 1 :***

Montrer que la suite définie pour tout par :

est majorée par

*Réponse*

On calcule puis on étudie son signe :

Conclusion : La suite est majorée par

***Exemple 2 :***

Montrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par

*Réponse*

On calcule puis on étudie son signe :

Conclusion : La suite est minorée par

### Chercher un encadrement de *un* en travaillant sur des inégalités.

***Exemple :***

Montrer que la suite définie pour tout par  est bornée.

*Réponse*

On part de l’encadrement de puis on arrive à un encadrement de .

Conclusion :

La suite est bornée par et

### Etudier le sens de variation de la suite (*un*)

* Si la suite est croissante pour tout , alors la suite est **minorée par son premier terme**.



***Exemple :***

Démontrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par

*Réponse :*

On montre d’abord que la suite est monotone croissante (voir la démonstration au paragraphe 4.5.1)

Le premier terme est

Conclusion : La suite est minorée par

* Si la suite est décroissante pour , alors la suite est **majorée par son premier terme**.

***Exemple :***

Démontrer que la suite définie pour tout par :

est minorée par



*Réponse :*

La suite est géométrique de premier terme strictement positif est de raison
 donc la suite est monotone décroissante. Le premier terme est .

Conclusion : La suite est majorée par

### Utiliser un raisonnement par récurrence.

***Exemple :***

Soit la suite définie sur par :

Démontrer que cette suite est majorée par

*Réponse*

Utilisons un raisonnement par récurrence pour établir la majoration de la suite

Soit la proposition , .

1. **Initialisation** : Montrons que est vraie pour .

On sait que

Donc on a bien

La proposition est vraie pour .

1. **Hérédité :** On suppose que la proposition soit vraie pour un entier , c’est à dire qu’on suppose que . Montrons qu’alors est vraie pour l’entier , c’est à dire que
* On cherche à écrire une inégalité concernant en partant de l’hypothèse de récurrence :

D’après la définition de la suite donnée dans l’énoncé, on a :

* On a obtenu la proposition écrite au rang
1. **Conclusion :** la proposition  : est vraie. est majorée par .

# Limite d’une suite

## Limite finie

***Définition :***

Soit un réel. Dire qu’une suite **a pour limite** signifie que tout intervalle ouvert contenant contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang. On écrit alors :

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

Cela signifie que tout intervalle (l’intervalle dans l’illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite () à partir d’un certain rang ( dans l’exemple ci-dessous).



## Limite infinie

***Définition 1 :***

Dire qu’une suite **a pour limite**  signifie que tout intervalle , avec *A* réel , contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang.

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

Cela signifie que tout intervalle (l’intervalle dans l’illustration ci-dessous) contient tous les termes de la suite () à partir d’un certain rang ( dans l’exemple ci-dessous).



***Définition 2 :***

Dire qu’une suite a pour limite signifie que :

***Exemple :***

La suite définie par a pour limite .

En effet : et donc



## Pas de limite

***Exemple 1 :***

La suite définie par prend alternativement les valeurs et . Elle n’a ni limite finie ni limite infinie.



***Exemple 2 :***

La suite définie par prend alternativement des valeurs réelles entre et . Elle n’a ni limite finie ni limite infinie.



## Vocabulaire

On dit que :

|  |  |
| --- | --- |
| Une suite de limite finie  | converge vers  |
| Une suite de limite infinie | diverge |
| Une suite qui n’a pas de limite | diverge |

## Propriétés

* Les suites de terme général sont convergentes et leur limite est

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  définie par  |  définie par  |

* Les suites de terme général sont divergentes et leur limite est

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  définie par  |  définie par  |

* Les suites constantes convergent vers la valeur de la constante

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  définie par  |  |  |

* Si une suite converge alors sa limite est **unique**.
* Détermination d’un seuil à l’aide d’un algorithme

***Exemple :***

Soit la suite définie pour tout par :

1. Montrer que cette suite est croissante
2. Montrer que cette suite a pour limite
3. Calculer et afficher le premier rang tel que

*Réponse*

Puisque la suite est définie par une fonction de , on peut étudier le sens de variation de la fonction.

Soit la fonction définie sur par

Cette fonction présente un extremum pour

 donc l’extremum est un minimum.

Dans la fonction est croissante sur .

Il en résulte que la suite est monotone croissante.

Donc

et donc

***Déclaration des variables***

N est un entier

U est un réel

Début algorithme

N prend la valeur 0

U prend la valeur 2

Tant que U

N prend la valeur N+1

U prend la valeur 3N²+2

Fin Tant que

Afficher N

Fin algorithme

# Théorèmes généraux sur les limites de suites

### Limite d’une somme de suites

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  |  |  |  |  |  |
| et si |  |  |  |  |  |  |
| alors |  |  |  |  |  | ***FI[[5]](#footnote-5)*** |

***Exemple :*** Déterminer

*Réponse :*  et donc, par somme,

### Limite d’un produit de suites

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  | ou  | ou  | ou  | ou  |  |
| et si |  |  |  |  |  |  ou  |
| alors |  |  |  |  |  | ***FI*** |

***Exemple :*** Déterminer

*Réponse :*  et donc, par produit,

### Limite d’un quotient de suites

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  |  |  |  |  |  |  ou  |  |
| et si |  |  ou  |  et  |  et  |  et  |  et  |  ou  | 0 |
| alors |  | 0 |  |  |  |  | ***FI*** | ***FI*** |

***Exemple :*** Déterminer . *Réponse :*  et donc,

### Cas d’indétermination

Il y a 4 cas d’indétermination

Dans ces cas, il faut modifier l’écriture de pour permettre l’utilisation des théorèmes.

***Exemple :*** Déterminer . *Réponse :*

* On a et donc on est en présence de la forme indéterminée
* On modifie l’écriture de , en cherchant par exemple à factoriser l’expression :
* On étudie la limite de chaque facteur :

 et

* Donc, par produit :

Conclusion :

### Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction polynôme

La limite **en l’infini** d’une fonction polynôme[[6]](#footnote-6) est égale à la limite en l’infini de son monôme de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction polynôme.

***Exemple :***

 Donc

### Limite en l’infini d’une suite définie par une fonction rationnelle

La limite **en l’infini** d’une fonction rationnelle[[7]](#footnote-7) est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Il en est donc de même pour une suite définie par une fonction rationnelle.

***Exemple :***

 Donc

## D’autres théorèmes pour trouver une limite de suite

### Théorème de comparaison pour prouver qu’une suite a comme limite

Soient et deux suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | alors |  |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout par

*Réponse*:

Les théorèmes sur les opérations sur les limites ne permettent pas de répondre puisque la suite définie par n’a pas de limite.

Mais on peut utiliser la comparaison de la suite avec une suite qu’on définit pour tout entier naturel par

En effet,  :

Or, , et par somme,

Donc, d’après le théorème de comparaison,

***Illustration graphique :***



***Démonstration :***

* Par définition, si , alors il existe un entier naturel tel que pour tout entier naturel *, .*
* De plus, par hypothèse il existe un entier naturel tel que pour tout entier naturel *, .*
* Soit un entier naturel supérieur ou égal à et . Donc pour tout , ainsi par définition de la limite  on déduit : *.*

### Théorème de comparaison pour prouver qu’une suite a comme limite -∞

Soit et deux suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | alors |  |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout entier naturel par

*Réponse :*

On définit la suite pour tout entier naturel par

 :

Or, , et par somme,

Donc, d’après le théorème de comparaison,

***Illustration graphique :***



### Théorème des gendarmes pour prouver qu’une suite a pour limite *l*

Soit , et trois suites telles que, à partir d’un certain rang , .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si  |  | et |  | alors |  |

***Exemple :***

Etudier la convergence de la suite définie pour tout entier naturel non nul par :

*Réponse :* On définit la suite pour tout entier naturel non nul par :

et la suite pour tout entier naturel non nul par :

 :

Or, , et par produit et par somme, et

Donc, d’après le théorème des gendarmes,

***Illustration graphique :***



## Remarque

 converge vers *l* ⇔ converge vers *l*  .

***Conséquence :***

Soit une suite définie pour tout par

Si la suite converge vers une limite finie , alors vérifie l’équation

***Démonstration :***

|  |  |
| --- | --- |
| Pour tout on a donc |  |
| Or, |  |

D’où :

## Théorème de la convergence d’une suite monotone (admis)

* 1er cas : Soit une suite croissante. Si cette suite est majorée alors elle converge.

***Exemple :***

La suite définie sur par 

On montre que :

* est croissante
* est majorée par (par exemple)

On conclut que *d’après le théorème de la convergence d’une suite monotone*, la suite a une limite finie.

* 2ème cas : Soit une suite décroissante. Si cette suite est minorée alors elle converge.

***Exemple :***

La suite définie sur par 

On montre que :

* est décroissante
* est minorée par (par exemple)

On conclut que *d’après le théorème de la convergence monotone*, la suite a une limite finie.

![MC900411320[1]]() Le théorème de la convergence monotone permet d’assurer qu’une suite converge. Mais il ne donne pas la valeur de la limite.

## Propriété : Suite croissante de limite *l*

Soit une suite croissante. Si cette suite est converge vers alors est un majorant de la suite.

***Exemple :***

La suite définie sur par 

On montre que :

* est croissante
* converge vers

On conclut que 2 est un majorant de la suite .

***Démonstration :***

Utilisons un raisonnement par l’absurde. Supposons que la propriété soit fausse.

Montrons que :

Si alors **n’est pas** un majorant de

Conduit à une absurdité.

1. **n’est pas** un majorant de donc il existe au moins un des termes de la suite tel que
2. signifie qu’il existe un rang à partir duquel, pour tout *, tout intervalle ouvert contenant*  contient tous les termes de la suite.

Au point (1) on avait :

Par ailleurs, on a par exemple :

Et donc on a :

D’où l’intervalle ouvert est un *intervalle ouvert contenant .*

**On en déduit qu’il existe un rang à partir duquel, pour tout , l’intervalle ouvert contient tous les termes de la suite.**

1. La suite est monotone croissante, donc, pour tout on a .

Donc, **pour tout on a .**

Conclusion :

D’après le (2) il existe un entier tel que pour tout on a : .

D’après le (3) il existe un entier tel que pour tout on a : .

C’est absurde. Donc la propriété énoncée ne peut pas être fausse. Donc elle est vraie.

## Théorème : suite croissante non majorée

Soit une suite croissante. Si cette suite n’est pas **majorée**, alors elle diverge vers .



***Démonstration :*** Soit *A* un réel.

* La suite n’est pas majorée donc il existe un entier tel que .
* De plus , la suite est croissante , donc tous ses termes , à partir du rang sont supérieurs à *A* et sont donc dans l’intervalle

Donc tout intervalle du type contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang (qui est ). Donc, par définition de la limite +, la suite tend vers +.

De même, on démontre que :

Soit une suite décroissante. Si cette suite n’est pas **minorée**, alors elle diverge vers .

## Limite d’une suite de terme général *qn*

***Propriété :***

Soit la suite définie sur par avec .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Si le valeur du réel est telle que … |  |  |  |  |
| Alors  | n’existe pas |  |  |  |

***Illustration :***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Démonstration : dans le cas où q >1.***

🟋 Démontrons d’abord, par récurrence, le résultat préliminaire suivant :

On appelle la propriété à démontrer.

*Initialisation*: pour .

D’une part,

D’autre part,

Donc on a

La proposition est vraie.

*Hérédité*: On admet que pour l’entier naturel , la proposition est vraie soit :

Démontrons alors que la proposition l’est aussi soit

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Or,

Donc

Ainsi la proposition est héréditaire.

*Conclusion* : est vraie tout entier naturel

 🟋Comme alors on peut poser avec α >0.

Ainsi, la propriété démontrée s’écrit :

On calcule les limites :

D’où, en utilisant le théorème de comparaison :

# Limite d’une fonction

## Limite finie *l* en ou

Soit *l*  un réel.

Dire qu’une fonction a pour **limite  *l*** en signifie que **tout intervalle ouvert contenant *l*** contient toutes les valeurs de dès que assez grand. (Enoncé analogue en ).

***Remarque :***

Cette définition est analogue à celle donnée pour les suites de limite en remplaçant « à partir d’un certain rang  » par « dès que est assez grand », autrement dit à partir d’un certain réel .

***Illustration :***



## Limite infinie en +∞

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *A* réel, contient toutes les valeurs de pour *x* assez grand.

***Illustration :***



***Exemple :*** Soit *f* la fonction définie sur par .

 Démontrons avec la définition que

Soit *A* un réel positif. . Donc pour *x* assez grand (ici ) , l’intervalle contient toutes les valeurs de . Ainsi .

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *B* réel, contient toutes les valeurs de pour *x* assez grand.



## Limite infinie en -∞

Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *A* réel, contient toutes les valeurs de pour tout *x* inférieur à une certaine valeur ..

***Illustration :***



Dire qu’une fonction *f* a pour **limite** en signifie que **tout intervalle**  , avec *B* réel, contient toutes les valeurs de pour tout *x* inférieur à une certaine valeur ..

***Illustration :***



## Pas de limite en + ∞

Une fonction peut n’avoir ni limite finie ni limite infinie lorsque x tend vers +∞

***Illustration :***



La fonction sinus n’a pas de limite en

## Limite finie *l* en un réel *a*

Soit *l*  un réel et soit une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un certain réel .

Dire qu’une fonction a pour **limite  *l*** en signifie que **tout intervalle ouvert contenant *l*** contient toutes les valeurs de dès que est assez proche de .

***Remarque 1 :***

On entend par « dès que est assez proche de », le fait qu’il existe un intervalle tel que si alors toutes les valeurs de sont dans l’intervalle qu’on a choisi.

***Remarque 2 :***

La définition précédente reste valable dans le cas où la fonction est définie sur un ensemble du type ou ou .

***Illustrations :***

|  |  |
| --- | --- |
|  est définie sur  |  est définie sur  |
|  |  |
|  |  |

## Limite +∞ en un réel *a*

Dire qu’une fonction a pour **limite**  en signifie que **tout intervalle**  , avec *A* réel, contient toutes les valeurs de dès que est assez proche de

***Illustrations***

|  |  |
| --- | --- |
|  est définie sur  |  est définie sur  |
|  |  |
|  |  |

***Remarque :***

On définit de la même façon

## Pas de limite en *a*

Une fonction définie sur un ensemble du type peut ne pas avoir de limite en . C’est le cas par exemple de la fonction définie sur par



## Théorèmes généraux.

* Les théorèmes utilisés pour les calculs des limites de suites sont réutilisés et étendus aux limites en et en un réel .
* et ’ sont deux réels, et sont deux fonctions définies sur un intervalle ou une réunion

d’intervalles de

* Le réel peut être remplacé par + ou –.

### Limite d’une somme.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | ***FI*** |

### Limite d’un produit.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  ou  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | ***FI*** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  ou  |
|  |  |  si  si  |  si  si  |  |

### Limite d’un quotient.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |  ou  |
|  |  |  ou  |  |  |  |  |  | 0 | ou  |
|  |  | 0 |  ou  |  |  |  |  | ***FI*** | ***FI*** |

## Théorème des gendarmes (admis)

Soient , et des fonctions et un réel.

Si pour assez grand, , si et si
alors :

Ce théorème s’étend aux cas de limites en et en un réel.

## Théorème de comparaison (admis)

Soient et deux fonctions.

• Si pour assez grand, et si alors

• Si pour assez grand, et si alors

## Limites et composées

### Composée de deux fonctions

 , et désignent des réels ou ou .

 et sont des fonctions. Si et si

alors

***Exemple*** : Soit la fonction définie sur par . Calculer

*Réponse :* et donc **par composition**,

### Composée d’une suite et d’une fonction

 et *b* désignent deux réels ou ou.

 est une suite, est une fonction.

Si et si , alors

***Exemple :*** Soit la suite de terme général . Calculer

*Réponse :* Posons avec :

 la suite définie sur par et la fonction définie sur par .

 donc **par composition**,

# Asymptotes.

## Asymptote parallèle à l’axe des ordonnées (asymptote verticale).

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ou ( réels)

Si  ou , alors la droite d'équation  est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de *f*.

## Asymptote parallèle à l’axe des abscisses (asymptote horizontale).

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ] (respectivement ). ( réel)

Si (respectivement ),

alors la droite d’équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de *f* en (respectivement).

1. **Proposition** : Enoncé susceptible d’être vrai ou faux. [↑](#footnote-ref-1)
2. **L’hypothèse de récurrence :** c’est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k* [↑](#footnote-ref-2)
3. **L’hypothèse de récurrence :** c’est la supposition que la proposition est vraie pour un entier *k* [↑](#footnote-ref-3)
4. Ceci serait facilement démontré par récurrence, dans un résultat préliminaire. [↑](#footnote-ref-4)
5. Dans certains cas, ces théorèmes ne nous permettent pas de prévoir le résultat. Ces cas sont appelés *FORMES INDETERMINEES (FI)*. [↑](#footnote-ref-5)
6. **Polynôme** Un polynôme est une s[omme](http://paquito.amposta.free.fr/glosss/somme.htm) de [monômes](http://paquito.amposta.free.fr/glossm/monome.htm).
Une fonction polynôme est une [fonction](http://paquito.amposta.free.fr/glossf/fonction.htm) de la forme $x⟼a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}$, où $a\_{n},a\_{n-1}, …a\_{1},a\_{0}$ sont des [réels](http://paquito.amposta.free.fr/glossr/reel.htm) donnés et $n$ un [entier naturel](http://paquito.amposta.free.fr/glossn/naturel.htm) appelé le [degré](http://paquito.amposta.free.fr/glossd/degre.htm) du polynôme lorsque $a\_{n}\ne 0$. [↑](#footnote-ref-6)
7. **Rationnelle** : Quotient de deux polynômes.
Une fonction rationnelle est une [fonction](http://paquito.amposta.free.fr/glossf/fonction.htm) de la forme $x⟼\frac{a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}}{b\_{m}x^{m}+b\_{m-1}x^{m-1}+…+b\_{1}x+b\_{0}}$, où $a\_{n},a\_{n-1}, …,a\_{1},a\_{0}, b\_{m},b\_{m-1}, …,b\_{1},b\_{0}$ sont des [réels](http://paquito.amposta.free.fr/glossr/reel.htm) et $n$ et $m$ des [entiers naturel](http://paquito.amposta.free.fr/glossn/naturel.htm)s tels que $a\_{n}\ne 0$ et $b\_{m}\ne 0$. [↑](#footnote-ref-7)