CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

[1 Langage de la continuité 2](#_Toc458518711)

[1.1 Définition 2](#_Toc458518712)

[1.2 Illustration graphique 2](#_Toc458518713)

[1.3 Fonctions usuelles 2](#_Toc458518714)

[2 Théorème des valeurs intermédiaires 3](#_Toc458518715)

[2.1 Enoncé 3](#_Toc458518716)

[2.2 Interprétation graphique 3](#_Toc458518717)

[2.3 Condition suffisante pour qu’une fonction soit une bijection 3](#_Toc458518718)

[2.4 Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires 4](#_Toc458518719)

[2.5 Extension 4](#_Toc458518720)

[3 Fonctions dérivables 4](#_Toc458518721)

[3.1 Nombre dérivé, fonction dérivée 4](#_Toc458518722)

[3.2 Ecriture différentielle 4](#_Toc458518723)

[3.3 Dérivabilité et continuité 5](#_Toc458518724)

[3.4 Dérivation d’une fonction composée. 5](#_Toc458518725)

[4 Fonctions cosinus et sinus 6](#_Toc458518726)

[4.1 Dérivée des fonctions cosinus et sinus 6](#_Toc458518727)

[4.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus 7](#_Toc458518728)

[4.2.1 Parité. 7](#_Toc458518729)

[4.2.2 Périodicité. 7](#_Toc458518730)

[4.3 Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus. 7](#_Toc458518731)

CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

# Langage de la continuité

## Définition

Soit une fonction définie sur un intervalle et un réel de .

|  |  |
| --- | --- |
| ⮚ Dire que est continue en signifie que  |  |
| ⮚ Dire que est continue sur signifie que est continue en tout réel de . |

## Illustration graphique

Lorsqu’une fonction est continue sur un intervalle , sa représentation graphique sur peut être tracée sans lever le crayon.

***Contre-exemple*** :

La partie entière d’un réel , notée , est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à .

Exemples :

 est la fonction qui, à tout réel , associe l’unique **entier relatif** tel que



La fonction partie entière n’est pas continue sur . Preuve :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Donc n’est pas continue en 2 |

## Fonctions usuelles

* Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur .
* La fonction racine carrée est continue sur .
* Les fonctions construites par opération ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition. (***Ex*** : les fonctions rationnelles)

# Théorème des valeurs intermédiaires

## Enoncé

* Soit *f* une fonction **continue** sur un intervalle , et deux réels de .
* Pour tout réel compris entre et , il existe **au moins un** réel compris entre et tel que .

## Interprétation graphique

Soit la courbe représentative de .

Pour tout réel compris entre et , la droite d’équation coupe **au moins une fois** la courbe en un point d’abscisse comprise entreet *.*



•

•

•

*M*

## Condition suffisante pour qu’une fonction soit une bijection

Si une fonction est continue et strictement croissante sur un intervalle alors la fonction est une bijection de vers

Si une fonction est continue et strictement décroissante sur un intervalle alors la fonction est une bijection de vers

## Corollaire[[1]](#footnote-1) du théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle

Pour tout réel *k* compris entre et l’équation admet **une solution unique** dans

## Extension

Le corollaire s’étend au cas où est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, c'est-à-dire sur des intervalles du type , , …

# Fonctions dérivables

## Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit une fonction définie sur un intervalle .

⮚ et sont deux réels de l’intervalle avec .

|  |  |
| --- | --- |
|  Dire que est dérivable en signifie que |  |

 est le nombre dérivé de la fonction calculé en . On note .

⮚ Dire que est dérivable sur signifie que est dérivable en tout de .

 La fonction dérivée, notée, est la fonction :

**Interprétation graphique de «  est dérivable en  »** :

Soit la courbe représentative de dans un repère. Une équation de la tangente à au point d’abscisse est : , où est un réel à déterminer.

## Ecriture différentielle

Soit *f* une fonction définie sur , un réel de et une fonction dérivable en .

Avec l’écriture différentielle, on note :

## 09tscours chap2 33.jpgDérivabilité et continuité

Soit une fonction définie sur et un réel de .

Si est dérivable en , alors est continue en .

![MCj04113200000[1]]() La réciproque est fausse.

**Exemple : Etude de la fonction en**

* Etude de la continuité en 0 : et donc .

Donc **la fonction valeur absolue est continue en 0**.

* Etude de la dérivabilité en 0 :

Si alors et

Si alors et

Conclusion : donc .

 n’existe pas. Donc **la fonction valeur absolue n’est pas dérivable en 0**.

## Dérivation d’une fonction composée.

Rappel : on note la fonction suivie de la fonction

Soit une fonction dérivable sur un intervalle et une fonction dérivable sur un intervalle .

Alors la fonction est dérivable sur

***Cas particuliers à connaître****:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Si pour tout , est dérivable en , alors est dérivable sur  |  |
|  | Si pour tout , alors est dérivable sur  |  |
|   | Si pour tout , alors est dérivable sur  |  |

***Exemple 1 :***

Soit définie sur par .

 avec et

 est dérivable sur et

* Si , alors donc donc soit

La fonction racine carrée est dérivable sur ] 0 ; +[

Donc pour tout de , soit ***.***

***Exemple 2*** : Soit la fonction définie sur par

 est une fonction polynôme, donc est dérivable sur .

Déterminons sa fonction dérivée : avec

# Fonctions cosinus et sinus

## Dérivée des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur

On admet que :

 et

***Propriété :***

Comme la fonction sinus est dérivable sur , elle est donc dérivable en.

## Propriétés des fonctions sinus et cosinus

### Parité.

La fonction cosinus est une **fonction paire**, en effet :

* Elle est définie sur qui est symétrique par rapport à 0.
* pour tout réel .

La fonction sinus est une **fonction impaire**, en effet :

* Elle est définie sur qui est symétrique par rapport à 0.
* pour tout réel .

### Périodicité.

La fonction cosinus est **périodique** de période , en effet :

.

La fonction sinus est **périodique** de période , en effet :

.

## Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus.



*Courbe représentative*

*de la fonction* ***cosinus***



*Courbe représentative*

*de la fonction* ***sinus***

1. Corollaire : Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée [↑](#footnote-ref-1)