

CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

1	Langage de la continuité	2
1.1	Définition	2
1.2	Illustration graphique	2
1.3	Fonctions usuelles	2
2	Théorème des valeurs intermédiaires.....	3
2.1	Enoncé.....	3
2.2	Interprétation graphique.....	3
2.3	Condition suffisante pour qu'une fonction f soit une bijection	3
2.4	Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires	4
2.5	Extension	4
3	Fonctions dérivables.....	4
3.1	Nombre dérivé, fonction dérivée	4
3.2	Ecriture différentielle	4
3.3	Dérivabilité et continuité.....	5
3.4	Dérivation d'une fonction composée.....	5
4	Fonctions cosinus et sinus.....	6
4.1	Dérivée des fonctions cosinus et sinus.....	6
4.2	Propriétés des fonctions sinus et cosinus	7
4.2.1	Parité.	7
4.2.2	Périodicité.....	7
4.3	Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus.....	7

CHAPITRE 2 : Continuité, dérivabilité et étude de fonctions

1 Langage de la continuité

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- Dire que f est continue en a signifie que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I .

1.2 Illustration graphique

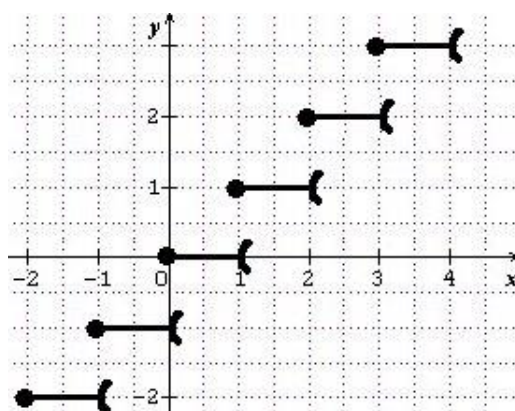
Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle I , sa représentation graphique sur I peut être tracée sans lever le crayon.

Contre-exemple :

La partie entière d'un réel x , notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Exemples : $E(2,4) = 2$ $E(\pi) = 3$ $E\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

E est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique **entier relatif** n tel que $n \leq x < n+1$



La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Preuve :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} E(x) = 1 \qquad E(2) = 2 \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} E(x) \neq E(2) \qquad \text{Donc } E \text{ n'est pas continue en } 2$$

1.3 Fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions construites par opération ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition. (**Ex** : les fonctions rationnelles)

2 Théorème des valeurs intermédiaires

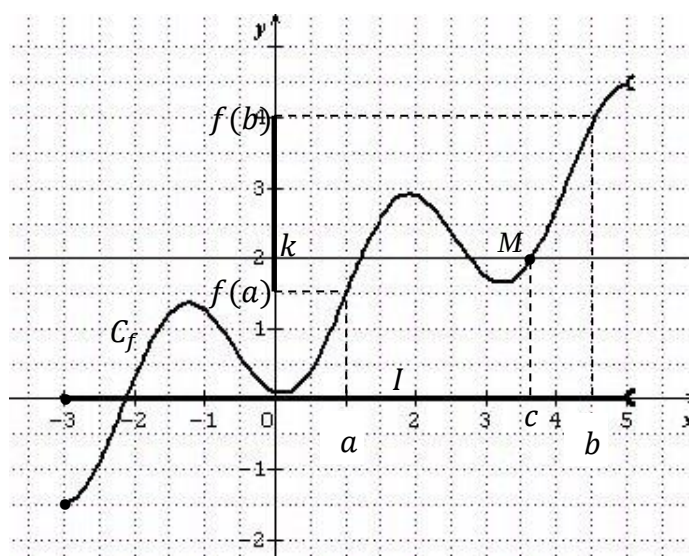
2.1 Enoncé

- Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I , a et b deux réels de I .
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

2.2 Interprétation graphique

Soit C_f la courbe représentative de f .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe **au moins une fois** la courbe C_f en un point d'abscisse c comprise entre a et b .



2.3 Condition suffisante pour qu'une fonction f soit une bijection

Si une fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a; b]$ vers $[f(a); f(b)]$

Si une fonction f est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a; b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a; b]$ vers $[f(b); f(a)]$

2.4 Corollaire¹ du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet **une solution unique** dans $[a; b]$

2.5 Extension

Le corollaire s'étend au cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, c'est-à-dire sur des intervalles du type $]a; b[$, $[a; b[$, $[a; +\infty[$...

3 Fonctions dérivables

3.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

➤ a et $a + h$ sont deux réels de l'intervalle I avec $h \neq 0$.

Dire que f est dérivable en a signifie que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

l est le nombre dérivé de la fonction f calculé en $x = a$. On note $f'(a) = l$.

➤ Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout x de I .

La fonction dérivée, notée f' , est la fonction : $x \mapsto f'(x)$

Interprétation graphique de « f est dérivable en a » :

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère. Une équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)x + p$, où p est un réel à déterminer.

3.2 Ecriture différentielle

Soit f une fonction définie sur I , x un réel de I et f une fonction dérivable en x .

Avec l'écriture différentielle, on note :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

¹ Corollaire : Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée

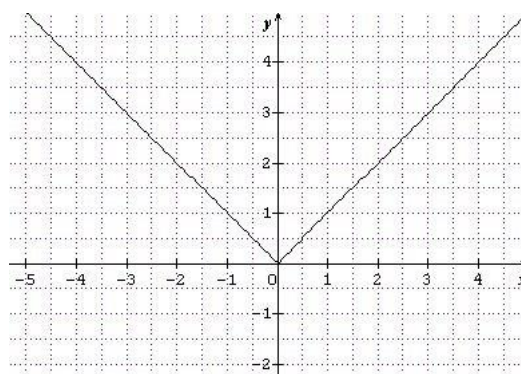
3.3 Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur I et a un réel de I .

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .



La réciproque est fausse.



Exemple : Etude de la fonction $f: x \mapsto |x|$ en $x = 0$

- Etude de la continuité en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Donc la fonction valeur absolue est continue en 0.

- Etude de la dérivabilité en 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$

Si $h < 0$ alors $|h| = -h$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$

Si $h > 0$ alors $|h| = h$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$

Conclusion : $-1 \neq 1$ donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas. Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

3.4 Dérivation d'une fonction composée.

Rappel : on note $f \circ u$ la fonction u suivie de la fonction f

$$f \circ u \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow J \rightarrow K \\ x \mapsto u(x) \mapsto f[u(x)] \end{array} \right.$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J .

Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I

Cas particuliers à connaître :

$I \rightarrow J \rightarrow K$ $x \mapsto u(x) = ax + b \mapsto f[ax + b]$	Si pour tout $x \in I$, f est dérivable en $ax + b$, alors $f \circ u$ est dérivable sur I	$(f \circ u)'(x) = a \times f'(ax + b)$
$I \rightarrow J \rightarrow K$ $x \mapsto u(x) \mapsto \sqrt{u(x)}$	Si pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I	$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$I \rightarrow J \rightarrow K$ $x \mapsto u(x) \mapsto [u(x)]^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$	Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors u^n est dérivable sur I	$(u^n)'(x) = n u^{n-1}(x) u'(x)$

Exemple 1 :

Soit f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{5x - 2}$.

$$f \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 5x - 2 \mapsto \sqrt{5x - 2} \end{cases}$$

$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 5x - 2$ et $x \in [1; +\infty[$

u est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $u'(x) = 5$

- Si $x \in [1; +\infty[$, alors $x \geq 1$ donc $5x - 2 \geq 3$ donc $5x - 2 \in]0; +\infty[$ soit $u(x) \in]0; +\infty[$

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc pour tout x de $[1; +\infty[$, $f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x-2}}$ soit $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$.

Exemple 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^4$

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons sa fonction dérivée : $f(x) = u^4(x)$ avec $u(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$f'(x) = 4u^3(x) \cdot u'(x)$$

$$f'(x) = 4(x^3 - 3x^2 + 1)^3(3x^2 - 6x)$$

4 Fonctions cosinus et sinus

4.1 Dérivée des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$

On admet que :

$(\cos)'(x) = -\sin(x)$	et	$(\sin)'(x) = \cos(x)$
-------------------------	----	------------------------

Propriété :

Comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable en $x = 0$.

$$(\sin)'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin(0)}{h}$$

$$(\sin)'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - 0}{h}$$

$$\cos(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - 0}{h}$$

$1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$
--

4.2 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

4.2.1 Parité.

La fonction cosinus est une **fonction paire**, en effet :

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
- $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout réel x .

La fonction sinus est une **fonction impaire**, en effet :

- Elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout réel x .

4.2.2 Périodicité.

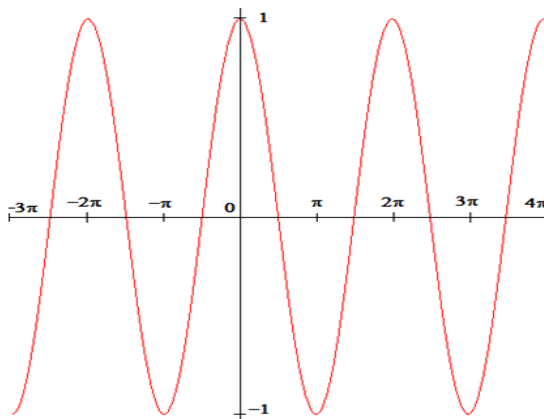
La fonction cosinus est **périodique** de période $T = 2\pi$, en effet :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

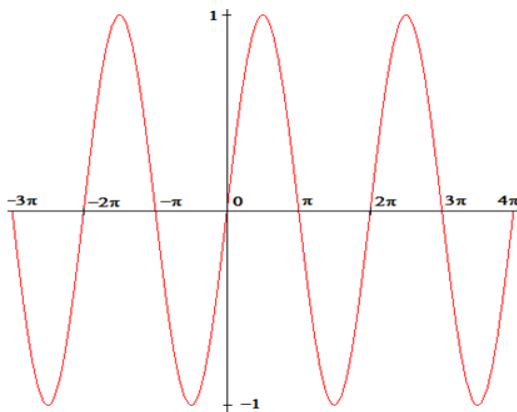
La fonction sinus est **périodique** de période $T = 2\pi$, en effet :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

4.3 Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus.



*Courbe représentative
de la fonction **cosinus***



*Courbe représentative
de la fonction **sinus***