CHAPITRE 3 : Fonction exponentielle

[1 La fonction exponentielle 2](#_Toc458519449)

[1.1 Théorème sur l’unicité de la solution à l’équation différentielle telle que *f* (0) = 1 2](#_Toc458519450)

[1.2 Relation fonctionnelle de la fonction exponentielle 4](#_Toc458519451)

[1.3 Positivité de la fonction exponentielle 4](#_Toc458519452)

[1.4 Sens de variation de la fonction exponentielle 5](#_Toc458519453)

[2 Propriétés de la fonction exponentielle 5](#_Toc458519454)

[2.1 Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle 5](#_Toc458519455)

[2.2 Nombre ; notation *ex* 6](#_Toc458519456)

[2.3 Egalités et inégalités 7](#_Toc458519457)

[3 Limites liées à la fonction exponentielle 7](#_Toc458519458)

[3.1 Limite de la fonction exponentielle en + ∞ 7](#_Toc458519459)

[3.2 Limite de la fonction exponentielle en - ∞ 8](#_Toc458519460)

[3.3 Limite  8](#_Toc458519461)

[3.4 Limite  8](#_Toc458519462)

[3.5 Limite  9](#_Toc458519463)

[3.6 Tableau de variation et représentation graphique 9](#_Toc458519464)

[4 Fonctions de la forme  10](#_Toc458519465)

CHAPITRE 3 : Fonction exponentielle

# La fonction exponentielle

## Théorème sur l’unicité de la solution à l’équation différentielle[[1]](#footnote-1) telle que *f* (0) = 1

Soit**une fonction** définie et dérivable sur un intervalle de .

Résoudre sur l’équation différentielle , c’est rechercher **les solutions** qui sont **les** **fonctions**   dérivables sur vérifiant pour tout de .

Si de plus, le problème impose à comme condition initiale avecet , on écrit l’équation différentielle :

***Exemple :***

Résoudre sur l’équation et , c’est rechercher la fonction dérivable sur telle que pour tout de , **et** .

***Théorème***:

Il existe une unique fonction dérivable sur , qui est la solution de l’équation différentielle :

 (E)

***L’existence de la solution est admise***

La méthode d’Euler permet de conjecturer l’existence de la solution *f*.

***Démonstration de l’unicité de la solution f***

* Montrons d’abord que pour tout réel

Considérons la fonction définie sur par

***Rappel :***

Soit une fonction définie et dérivable sur  :

Sa dérivée est la fonction .

En particulier pour et , la dérivée de la fonction définie et dérivable sur  :
 est la fonction .

On a admis que , fonction dérivable sur , solution de , existait. Donc on peut définir la fonction telle que .

 est dérivable sur .

Si on pose alors

D’où :

Une des hypothèses est que est solution de l’équation différentielle .

Donc on a pour tout réel .

D’où :

Lorsque la dérivée d’une fonction est nulle pour tout réel , cette fonction est constante.

 est donc **une fonction constante**.

Pour trouver cette constante, on utilise l’hypothèse .

Comme pour tout réel , on a :

donc la fonction constante est définie pour tout réel par

Soit pour tout réel.

Cela permet d’affirmer que pour tout réel

* Montrons ensuite que la solution est **unique**.

Supposons qu’il existeune autre fonction dérivable sur , qui est solution de l’équation différentielle :

 (E)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Considéronsla fonction dérivable sur définie par : |  |  |

La condition pour tout réel est vraie comme cela a été démontré dans le premier point.

Montrons que pour tout réel ce qui prouvera que pour tout réel .

La fonction est le quotient de deux fonctions dérivables sur . Donc est dérivable sur et on a :

Or et sont des solutions de l’équation (E) donc et

Pour tout réel on a :

Donc est une fonction constante sur .

Or donc pour tout réel , .

Donc *, .* ***Donc g et f sont égales****.* Ainsi l’équation (E) admet une unique solution.

***Définition :***

On appelle **fonction exponentielle** l’unique fonction dérivable sur telle que et . Cette fonction sera notée provisoirement .

exp est donc la seule fonction dérivable sur , telle que et

***Dérivée de la fonction exponentielle :***

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur . Sa dérivée est égale à elle-même :

Pour tout réel , .

***Remarque***

Puisqu’elle est dérivable sur , la fonction exponentielle est continue sur .

## Relation fonctionnelle[[2]](#footnote-2) de la fonction exponentielle

Pour tous réels et ,

## Positivité de la fonction exponentielle

 pour tout réel .

***Démonstration :***

D’après la relation fonctionnelle : pour tout

ce qui s’écrit :

Comme un carré est toujours positif ou nul, on déduit que :

Pour tout ,

soit : .

On a démontré précédemment que pour tout réel , ce qui permet de conclure :

**Pour tout réel ,**

## Sens de variation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur .

***Démonstration :***

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur et que pour tout réel , .

D’après la positivité de la fonction exponentielle, on sait aussi que pour tout réel .

Conclusion :

**La fonction exponentielle est strictement croissante sur .**

# Propriétés de la fonction exponentielle

## Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

|  |
| --- |
| Pour tous réels et et pour tout entier relatif: |
| (1) |  |
| (2) |  |
| (3) |  |
| (4) |  |

***Démonstrations :***

1. Pour tout réel  :

 en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction .

1. Pour tout réel  :

 en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction .

1. Pour tous réels et  :

 en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction .

Or, d’après (2) :

Donc :

* Dans un premier temps, démontrons par récurrence que la propriété

: est vraie pour tout *.*

* + Initialisation :

D’une part, *.* Donc

D’autre part, en utilisant la propriété pour tout réel .

Finalement . Donc P0 est vraie.

* + Hérédité :

Supposons que soit vraie , où est un naturel donné : *.*

Montrons qu’alors est vraie, c'est-à-dire que :

On a :

 en utilisant la relation fonctionnelle de .

 en utilisant l’hypothèse de récurrence

 donc vraie

* + Conclusion : la propriété : est vraie pour tout *.*
* On admet que la relation est vraie pour tout (ensemble des entiers négatifs).

## Nombre ; notation *ex*

D’après la relation (4) établie précédemment, .

En particulier, pour ,.

* On note le nombre[[3]](#footnote-3) qui est l’image de 1 par la fonction exponentielle ***:***

 se lit « *e* exposant  »ou « exponentielle de  »

Une valeur approchée de à 10–3 près est 2,718.

* Avec cette notation,

On généralise cette nouvelle écriture de la fonction exponentielle pour tout  :

* La relation fonctionnelle et ses corollaires déjà démontrés s’écrivent alors avec cette nouvelle notation :

Pour tous réels et et pour tout entier relatif  :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

On a aussi :

* La fonction est dérivable sur et sa dérivée est elle-même.
* .
* , .
* La fonction est strictement croissante sur .

## Egalités et inégalités

***Egalités équivalentes***

Pour tous réels et  : équivaut à .

***Inégalités équivalentes***

Pour tous réels et  : équivaut à .

# Limites liées à la fonction exponentielle

## Limite de la fonction exponentielle en + ∞

***Démonstration :***

* Etudions d’abord le sens de variation de la fonction définie sur par :

 est dérivable sur comme somme de fonctions dérivables et

Si alors :

 car la fonction exponentielle est strictement croissante sur .

D'où le tableau de variation de la fonction :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Donc, d'après le tableau de variations de , pour tout :

* Puis, appliquons le théorème de comparaison :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | donc |  |

## Limite de la fonction exponentielle en - ∞

***Démonstration :*** On transforme l’expression de façon à pouvoir utiliser le résultat du § 3.1.

Et par inverse :

Conclusion :

## Limite limite(exp(x))surx serré.jpg

## Limite limite x exp(x) serré.jpg

## Limite limite (exp(x)-1)surx.jpg

***Démonstration :***

|  |  |
| --- | --- |
|  | où est la fonction , définie et dérivable sur . |

 en utilisant la définition du nombre dérivé en .

Or, donc

## Tableau de variation et représentation graphique

|  |  |
| --- | --- |
|  |   |
| Signe de  | + |
| sens de variation de  |  0 |

donc l’axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en .

* La droite d’équation est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d’abscisse 0.

 donc

Le point de la courbe d’abscisse a pour ordonnée . Donc

Donc la tangente a pour équation .

# Fonctions de la forme exp(u(x)).jpg

Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle .

On admet que la fonction composée *f* définie sur par est dérivable sur et que :

***Remarque :***

Dans **,** le facteur est strictement positif pour tout . Donc est du même signe que . **Ainsi la fonction a le même sens de variation que la fonction sur .**

***Exemples :***

* définie sur par avec est décroissante sur .
* définie sur par avec a le même sens de variation sur que la fonction c'est-à-dire croissante sur et décroissante sur .
1. Une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. [↑](#footnote-ref-1)
2. Une relation fonctionnelle est une relation utilisant les opérations qui est propre à une fonction donnée. [↑](#footnote-ref-2)
3. Le mathématicien suisse Léonard Euler utilisa en 1728 pour la première fois la notation $e$. [↑](#footnote-ref-3)