

CHAPITRE 3 : Fonction exponentielle

1	La fonction exponentielle.....	2
1.1	Théorème sur l'unicité de la solution à l'équation différentielle $y' = y$ telle que $f(0) = 1$...	2
1.2	Relation fonctionnelle de la fonction exponentielle	4
1.3	Positivité de la fonction exponentielle.....	4
1.4	Sens de variation de la fonction exponentielle	5
2	Propriétés de la fonction exponentielle	5
2.1	Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle.....	5
2.2	Nombre e ; notation e^x	6
2.3	Egalités et inégalités.....	7
3	Limites liées à la fonction exponentielle	7
3.1	Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$	7
3.2	Limite de la fonction exponentielle en $-\infty$	8
3.3	Limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$	8
3.4	Limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$	8
3.5	Limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$	9
3.6	Tableau de variation et représentation graphique	9
4	Fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$	10

CHAPITRE 3 : Fonction exponentielle

1 La fonction exponentielle

1.1 Théorème sur l'unicité de la solution à l'équation différentielle¹ $y' = y$ telle que $f(0) = 1$

Soit y une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résoudre sur I l'équation différentielle $y' = y$, c'est rechercher les solutions qui sont les fonctions f dérivables sur I vérifiant $f'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

Si de plus, le problème impose à f comme condition initiale $f(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, on écrit l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y' = y \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Exemple :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = y$ et $f(0) = 1$, c'est rechercher la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (E)$$

L'existence de la solution f est admise

La méthode d'Euler permet de conjecturer l'existence de la solution f .

Démonstration de l'unicité de la solution f

- Montrons d'abord que pour tout réel x $f(x) \neq 0$

Considérons la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(-x) \times f(x)$

Rappel :

Soit une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} : x \mapsto f(ax + b)$

Sa dérivée est la fonction $x \mapsto af'(ax + b)$.

En particulier pour $a = -1$ et $b = 0$, la dérivée de la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} :$

$x \mapsto f(-x)$ est la fonction $x \mapsto -f'(-x)$.

¹ Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

On a admis que f , fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de $y' = y$, existait. Donc on peut définir la fonction Φ telle que $\Phi(x) = f(-x) \times f(x)$.
 Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose $\begin{cases} u(x) = f(-x) \\ v(x) = f(x) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -f'(-x) \\ v'(x) = f'(x) \end{cases}$

D'où :

$$\Phi'(x) = -f'(-x) \cdot f(x) + f(-x) \cdot f'(x)$$

Une des hypothèses est que f est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
 Donc on a $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \Phi'(x) &= -f(-x) \cdot f(x) + f(-x) \cdot f(x) \\ \Phi'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque la dérivée d'une fonction est nulle pour tout réel x , cette fonction est constante.

Φ est donc **une fonction constante**.

Pour trouver cette constante, on utilise l'hypothèse $f(0) = 1$.

Comme $\Phi(x) = f(-x) \times f(x)$ pour tout réel x , on a :

$$\Phi(0) = f(-0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1$$

donc la fonction constante Φ est définie pour tout réel par $\Phi(x) = 1$

Soit $\Phi(x) = f(-x) \times f(x) = 1$ pour tout réel x .

Cela permet d'affirmer que pour tout réel x $f(x) \neq 0$

- Montrons ensuite que la solution f est **unique**.

Supposons qu'il existe g une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x, g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{E})$$

Considérons h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $h = \frac{g}{f}$

La condition $f(x) \neq 0$ pour tout réel x est vraie comme cela a été démontré dans le premier point.

Montrons que $h(x) = 1$ pour tout réel x ce qui prouvera que $g(x) = f(x)$ pour tout réel x .

La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Or g et f sont des solutions de l'équation (E) donc $g' = g$ et $f' = f$

Pour tout réel x on a :

$$h'(x) = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{[f(x)]^2}$$

$$h'(x) = 0$$

Donc h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc pour tout réel x , $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$. **Donc g et f sont égales.** Ainsi l'équation (E) admet une unique solution.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction sera notée provisoirement **exp**.

exp est donc la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $(\exp)' = \exp$ et $\exp(0) = 1$

Dérivée de la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est égale à elle-même :

Pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.

Remarque

Puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

1.2 Relation fonctionnelle² de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b , $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

1.3 Positivité de la fonction exponentielle

$\exp(a) > 0$ pour tout réel a .

Démonstration :

D'après la relation fonctionnelle : pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right)$

ce qui s'écrit :

$$\exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2$$

² Une relation fonctionnelle est une relation utilisant les opérations qui est propre à une fonction donnée.

Comme un carré est toujours positif ou nul, on déduit que :

$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{soit :} \quad \exp(a) \geq 0.$$

On a démontré précédemment que pour tout réel a $\exp(a) \neq 0$, ce qui permet de conclure :

$$\text{Pour tout réel } a, \exp(a) > 0.$$

1.4 Sens de variation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.

D'après la positivité de la fonction exponentielle, on sait aussi que $\exp'(x) > 0$ pour tout réel x .

Conclusion :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$$(1) \quad \exp(2a) = [\exp(a)]^2$$

$$(2) \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

$$(3) \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$(4) \quad \exp(na) = [\exp(a)]^n$$

Démonstrations :

(1) Pour tout réel a :

$$\exp(2a) = \exp(a + a)$$

$$\exp(2a) = \exp(a) \times \exp(a) \text{ en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction exp.}$$

$$\exp(2a) = [\exp(a)]^2$$

(2) Pour tout réel a :

$$\exp(a) \times \exp(-a) = \exp(a - a) \text{ en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction exp.}$$

$$\exp(a) \times \exp(-a) = \exp(0)$$

$$\exp(a) \times \exp(-a) = 1$$

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

(3) Pour tous réels a et b :

$\exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a - b)$ en utilisant la relation fonctionnelle de la fonction $\exp$.

Or, d'après (2) :

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$$

Donc :

$$\exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \exp(a - b)$$

$$\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a - b)$$

(4)

- Dans un premier temps, démontrons par récurrence que la propriété

$P_n : \exp(na) = [\exp(a)]^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation :

D'une part, $\exp(0) = 1$. Donc $\exp(0a) = 1$.

D'autre part, $[\exp(a)]^0 = 1$ en utilisant la propriété $x^0 = 1$ pour tout réel $x \neq 0$.

Finalement $\exp(0a) = [\exp(a)]^0$. Donc P_0 est vraie.

- Hérité :

Supposons que P_k soit vraie, où k est un naturel donné : $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$.

Montrons qu'alors P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que : $\exp[(k+1) \times a] = [\exp(a)]^{k+1}$

On a : $\exp[(k+1) \times a] = \exp[ka + a]$

$\exp[(k+1) \times a] = \exp(ka) \times \exp(a)$ en utilisant la relation fonctionnelle de $\exp$.

$\exp[(k+1) \times a] = [\exp(a)]^k \times \exp(a)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence

$\exp[(k+1) \times a] = [\exp(a)]^{k+1}$ donc P_{k+1} vraie

- Conclusion : la propriété $P_n : \exp(na) = [\exp(a)]^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On admet que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$ (ensemble des entiers négatifs).

2.2 Nombre e ; notation e^x

D'après la relation (4) établie précédemment, $\exp(px) = [\exp(x)]^p \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

En particulier, pour $x = 1$, $\exp(p) = [\exp(1)]^p \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

- On note e le nombre³ qui est l'image de 1 par la fonction exponentielle : **$\exp(1) = e$**

Une valeur approchée de e à 10^{-3} près est 2,718.

- Avec cette notation, $\exp(p) = e^p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}$

e^x se lit « e exposant x » ou « exponentielle de x »

³ Le mathématicien suisse Léonard Euler utilisa en 1728 pour la première fois la notation e .

On généralise cette nouvelle écriture de la fonction exponentielle pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- La relation fonctionnelle et ses corollaires déjà démontrés s'écrivent alors avec cette nouvelle notation :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{na} = (e^a)^n$
----------------------------	--------------------------	-----------------------------	--------------------

On a aussi :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.
- $e^0 = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.3 Egalités et inégalités

Egalités équivalentes

Pour tous réels a et b : $\exp(a) = \exp(b)$ équivaut à $a = b$.

Inégalités équivalentes

Pour tous réels a et b : $\exp(a) < \exp(b)$ équivaut à $a < b$.

3 Limites liées à la fonction exponentielle

3.1 Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration :

- Etudions d'abord le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = e^x - 1$

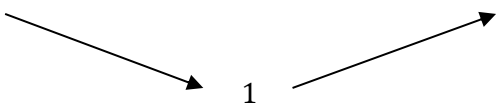
Si $x \geq 0$ alors :

$e^x \geq e^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$e^x \geq 1$$

$$e^x - 1 \geq 0$$

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Donc, d'après le tableau de variations de f , pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) > 0$$

$$e^x - x > 0$$

$$e^x > x$$

- Puis, appliquons le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

3.2 Limite de la fonction exponentielle en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration : On transforme l'expression e^x de façon à pouvoir utiliser le résultat du § 3.1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Et par inverse :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

3.3 Limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3.4 Limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$$

3.5 Limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} \quad \text{où } f \text{ est la fonction } x \mapsto e^x, \text{ définie et dérivable sur } \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) \text{ en utilisant la définition du nombre dérivé en } 0.$$

Or, $f'(0) = e^0 = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3.6 Tableau de variation et représentation graphique

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
sens de variation de f	$0 \rightarrow +\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

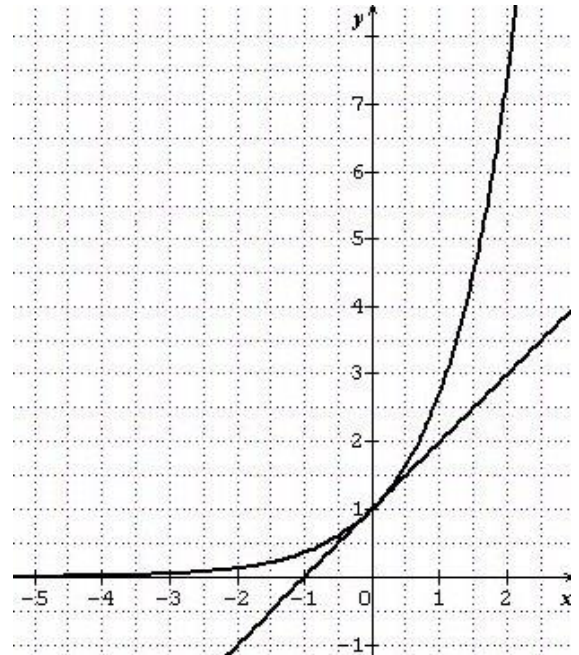
donc l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

- La droite T_0 d'équation $y = mx + p$ est la tangente à la courbe C_f représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

$$m = f'(0) = e^0 = 1 \text{ donc } y = x + p$$

Le point de la courbe C_f d'abscisse 0 a pour ordonnée $e^0 = 1$. Donc $1 = 0 + p$

Donc la tangente T_0 a pour équation $y = x + 1$.



4 Fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

On admet que la fonction composée f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et que :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Remarque :

Dans $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$, le facteur $e^{u(x)}$ est strictement positif pour tout $x \in I$. Donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$. **Ainsi la fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u sur I .**

Exemples :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-kx}$ avec $k > 0$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-kx^2}$ avec $k > 0$ a le même sens de variation sur $\mathbb{R}$ que la fonction $x \mapsto -kx^2$ c'est-à-dire croissante sur $] -\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.