CHAPITRE 4 : Les nombres complexes

[1 Définition 2](#_Toc460272274)

[1.1 Théorème 2](#_Toc460272275)

[1.2 Définitions 2](#_Toc460272276)

[1.3 Théorème 2](#_Toc460272277)

[2 Nombre complexe conjugué 3](#_Toc460272278)

[2.1 Définition 3](#_Toc460272279)

[2.2 Théorème 1 3](#_Toc460272280)

[2.3 Théorème 2 3](#_Toc460272281)

[2.4 Théorème 3 4](#_Toc460272282)

[2.5 Théorème 4 5](#_Toc460272283)

[3 Résolution dans d’équations du second degré à coefficients réels 5](#_Toc460272284)

[4 Nombres complexes et géométrie 7](#_Toc460272285)

[4.1 Représentation graphique d’un nombre complexe 7](#_Toc460272286)

[4.2 Lien avec la géométrie 8](#_Toc460272287)

[5 Module et arguments d’un nombre complexe 11](#_Toc460272288)

[5.1 Module 11](#_Toc460272289)

[5.2 Arguments 12](#_Toc460272290)

[5.3 Forme trigonométrique 12](#_Toc460272291)

[6 Propriétés du module et des arguments 13](#_Toc460272292)

[6.1 Arguments d’un réel, d’un imaginaire pur 13](#_Toc460272293)

[6.2 Propriétés du module 14](#_Toc460272294)

[6.3 Propriétés des arguments 17](#_Toc460272295)

[7 Nombres complexes et géométrie 19](#_Toc460272296)

[8 Notation exponentielle 20](#_Toc460272297)

[8.1 Fonction 20](#_Toc460272298)

[8.2 Notation 21](#_Toc460272299)

[8.3 Forme exponentielle d’un nombre complexe non nul 22](#_Toc460272300)

CHAPITRE 4 : Les nombres complexes

1ère PARTIE : Forme algébrique

# Définition

L’ensemble des nombres complexes, noté , est l’ensemble des nombres qui peuvent s’écrire sous la forme : , avec et deux réels et un nombre tel que **.**

## Théorème

Tout nombre complexe s’écrit de manière unique sous la forme .

Cette forme s’appelle ***forme algébrique****.*

## Définitions

, noté est appelé ***la partie réelle de z****.*

, noté , est appelé ***la******partie imaginaire de z.***

***Cas particuliers****: équivaut à* le nombre complexe est **imaginaire pur**.

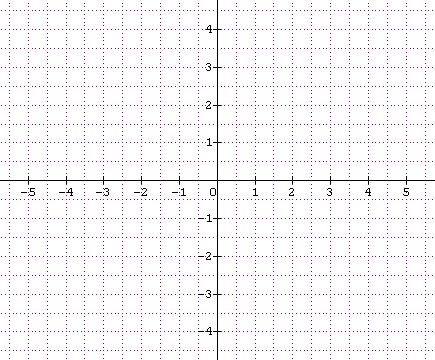
*équivaut à* le nombre complexe est **réel**.

## Théorème

• Deux nombres complexes et sont égaux si et seulement si et

• équivaut à et

Axe des imaginaires purs



***Exemple :***

Représentation du   
nombre complexe

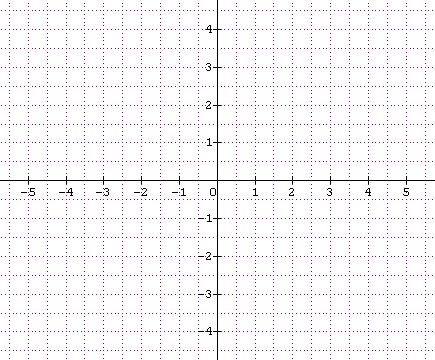
Axe des réels

# Nombre complexe conjugué

## Définition

Soit le nombre complexe tel que

Le nombre conjugué de , noté est tel que .



Axe des imaginaires purs

Représentation du nombre complexe

et de son conjugué

Axe des réels

## Théorème 1

Pour tout nombre complexe , on a : est donc un réel.

***Démonstration*** :

## Théorème 2

Pour tous nombres complexes et :

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Pour tout |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Pour tout |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Pour tout |  |

***Démonstrations :***

1. donc

Et

D’où le résultat :

1. donc

Et

D’où le résultat :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | donc |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Et |  |

|  |  |
| --- | --- |
| D’où le résultat : |  |

|  |
| --- |
|  |

1. Démontrons par récurrence l’égalité pour tout :

* Initialisation : donc et d’où le résultat
* Hérédité : On suppose que pour un entier naturel ,   
  Montrons qu’alors

|  |  |
| --- | --- |
| * Conclusion : Pour tout |  |

On admet l’égalité pour tout entier négatif :

## Théorème 3

Soit un nombre complexe.

(1) est un réel équivaut à .

(2) est un imaginaire pur équivaut à .

## Théorème 4

Quel que soit le nombre complexe  :

* est un réel
* est un imaginaire pur

Exemple : Soit et . On a et .

# Résolution dans d’équations du second degré à coefficients réels

Soient , et des réels , avec .

On considère l’équation . Elle admet :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | et |  |

• Si deux solutions réelles

|  |
| --- |
|  |

• Si une solution réelle double

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | et |  |

• Si deux solutions complexes conjuguées

***Démonstration :***

* Mise sous forme canonique du trinôme :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | est le début de |  |

* Factorisation

Si ou si , on retrouve les résultats vus en première.

Si alors

* Conclusion

Si l’équation admet deux solutions qui sont les nombres complexes conjugués :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | et |  |

***Exemple*** : Résoudre dans l’équation

L’équation est de la forme avec , , .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | et |  |
|  | et |  |

Donc l’équation a deux solutions complexes conjuguées :

L’ensemble des solutions dans est

# Nombres complexes et géométrie

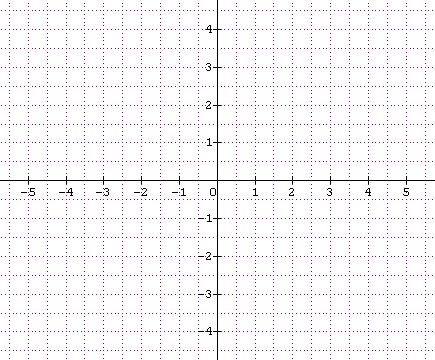
## Représentation graphique d’un nombre complexe

Le plan est muni d’un repère orthonormé direct

• On représente le nombre complexe de forme algébrique par le point de coordonnées .

On dit que le point est l’***image*** du complexe et que le complexe est l’***affixe*** du point .

Pour écrire « le point d’affixe  » on écrit où est un nombre complexe.

***Exemple :***

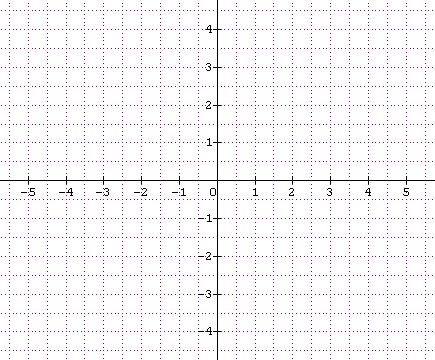
Placer dans le plan complexe le point d’affixe

On a donc associé à chaque nombre complexe de forme algébrique , le point de coordonnées

• Par ailleurs, il est possible d’associer à chaque nombre complexe de forme algébrique , le vecteur de coordonnées

est ***l’affixe*** du vecteur .

On note .



***Exemple :***

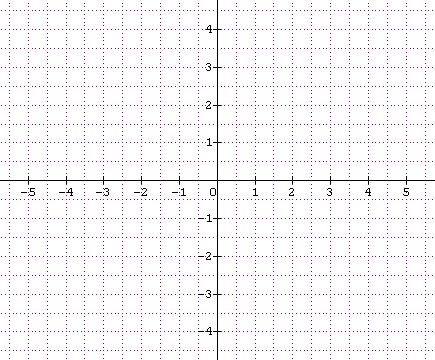
Représenter dans le plan complexe le vecteur d’affixe

• L’axe est appelé ***axe des réels*** , l’axe l’***axe des imaginaires purs***.

• Le plan dans lequel les points sont repérés par leur affixe est appelé le ***plan complexe****.*

## Lien avec la géométrie

On considère les points , et du plan complexe.

• est l’affixe de

*b'*

*M’*

Si et

Alors

*b*

*M*

Cas particulier :

*a*

*a’*

a pour affixe

a la même affixe que .

|  |  |
| --- | --- |
| * et sont symétriques par rapport à l’axe des réels. | plan complexe.jpg  •  •  *a*  *b* |
|  |  |
| * équivaut à appartient à l’axe des réels. | plan complexe.jpg  • |
|  |  |
| * équivaut à appartient à l’axe des imaginaires purs. | plan complexe.jpg  *b*  •  • |
|  |  |
| * et sont symétriques par rapport au point | plan complexe.jpg  •  •  *b*  *a* |
|  |  |
| * et sont symétriques par rapport à l’axe des imaginaires purs. | plan complexe.jpg  •  •  *b*  *a* |
|  |  |
| * et ont pour milieu le point d’affixe | plan complexe.jpg  •  •  •  *a*  *b* |

2ème PARTIE : Forme trigonométrique

# Module et arguments d’un nombre complexe

## Module

Soit un nombre complexe de forme algébrique ( et réels).

Le module de , noté , est le réel défini par

|  |  |
| --- | --- |
| ***Interprétation géométrique*** :  Dans le plan complexe, si a pour affixe alors  ***Exemple :***  Soit . Calculer . | plan complexe.jpg  *a*  *b*  • |

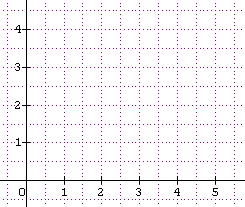
***Théorème*** : Pour tout nombre complexe , on a :

***Démonstration :***

1. Soit . Calculer
2. Comparer à

***Module et distance***

Soit les points et dans le plan rapporté au repère orthonormé .

1. Avec les coordonnées :
2. Avec les affixes :

•

*b*

*b’*

On pose et

•

On a , et donc .

*a*

*a’*

Conclusion :

## Arguments

Soit un nombre complexe non nul et le point d’affixe dans le plan complexe muni du repère orthonormal .

Un argument de , noté est une mesure de l’angle orienté de vecteurs .

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Soit .  Calculer .  ***Remarques***:  • n’a pas d’argument.  • Un nombre complexe non nul a une infinité d’arguments.  Si est l’un d’entre eux, tout autre est de la forme . | plan complexe.jpg  •  *a*  *b* |

## Forme trigonométrique

|  |  |
| --- | --- |
| Soit un nombre complexe non nul de forme algébrique .  Soit le module de et un argument de .  On a alors :  Ainsi  Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du complexe . |  |

***Exemple :***

Soit le nombre complexe écrit sous la forme algébrique .

Ecrire sous la forme trigonométrique.

***Propriétés :***

• Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s’ils ont même module et même argument à près, .

• Si un nombre complexe s’écrit avec   
alors et

# Propriétés du module et des arguments

## Arguments d’un réel, d’un imaginaire pur

|  |  |
| --- | --- |
| Soit un nombre complexe non nul.   * est un nombre réel non nul si et seulement si | plan complexe.jpg |
|  |  |
| * est un nombre réel strictement positif si et seulement si | plan complexe.jpg |
|  |  |
| * est un nombre réel strictement négatif si et seulement si | plan complexe.jpg |
| * est un nombre imaginaire pur non nul si et seulement si | plan complexe.jpg |

## Propriétés du module

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | si et seulement si | ***Démonstration :***  Soit  équivaut successivement à : |
|  |  |  |
|  | ***Démonstration :***  Soit et  Donc | plan complexe.jpg  •  • |
|  |  |  |
|  |  | plan complexe.jpg  •  • |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | ***Démonstration :***  **:**  Si  et  Alors et  C’est la forme trigonométrique d’un complexe de module  Conclusion :  Si ou est nul :  Alors et  et ou donc  Conclusion : |
| repère sine qua non grand.jpg  •  •  • | |
|  | |  |
|  |  |  |
| repère sine qua non très petit.jpg  •  • | |
|  | |  |
|  |  | ***Démonstration :***  D’après la propriété (4) :  D’après la propriété (5) :  Donc  Conclusion : |
| repère sine qua non moyen.jpg  •  •  • | |
|  |  | ***Démonstration :***  Démonstration par récurrence :  Initialisation :  Donc  Hérédité :  Supposons que pour un entier naturel non nul donné, on ait :  On sait que :  .  D’après la propriété (4) :  Donc :  D’après l’hypothèse de récurrence :  Donc :  Ainsi la propriété est vraie pour l’entier naturel .  Conclusion : |
| repère sine qua non cercles r 2 et 8.jpg  •  • | |
|  | ***Remarque 1 :***  On admet que la propriété (7) est vraie aussi lorsque est un entier négatif non nul : | ***Remarque 2 :***  La propriété (7) est vraie aussi lorsque est nul |
|  |  |  |
|  | (inégalité triangulaire)  ***Remarque :***  En général : | ***Démonstration :***  Soit , et  plan complexe.jpg  •  •  •  On a : |

## Propriétés des arguments

et sont deux nombres complexes non nuls.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ***Démonstration :***  plan complexe.jpg  •  •  équivaut à |
|  |  |  |
|  |  | plan complexe.jpg  •  • |
|  |  |  |
|  |  | repère sine qua non grand.jpg  •  •  • |
|  | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. repère sine qua non très petit.jpg |  | ***Démonstration :***  D’après la propriété (3) :  Comme  Alors  Donc  Conclusion : |
|  |  |  |
|  |  | ***Démonstration :***  D’après la propriété (3) :  D’après la propriété (4) :  Donc  Conclusion : |
| repère sine qua non moyen.jpg  •  •  • | |
|  |  |  |
|  |  | ***Remarque 1 :***  La propriété (6) est vraie aussi lorsque n est un entier négatif non nul :  ***Remarque 2 :***  La propriété (6) est vraie aussi lorsque n est nul |
| •  • | |
|  |  |  |

# Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d’un repère orthonormal . On considère les points , tels que et soient distincts.

|  |  |
| --- | --- |
|  | plan complexe.jpg  •  •  • |
|  |  |

On considère les points , , , distincts deux à deux.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  |   ***Démonstration :***   |  | | --- | |  |   ***Démonstration :*** | plan complexe.jpg  •  •  •  • |

***Cas particuliers*** :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | | | et sont parallèles équivaut à : | | |  | est un réel non nul |   ***Démonstration :***  et sont parallèles  équivaut successivement à :  ou     |  |  | | --- | --- | |  | est un réel non nul | | plan complexe.jpg  •  •  •  • |
|  |  |
| |  |  | | --- | --- | |  | | | et sont perpendiculaires équivaut à : | | |  | est un imaginaire pur non nul |   ***Démonstration :***  et sont perpendiculaires  équivaut successivement à :  ou   |  |  | | --- | --- | |  | est un imaginaire pur non nul | | plan complexe.jpg  •  •  •  • |

# Notation exponentielle

## Fonction

On considère la fonction définie de dans par

* Montrons que la fonction vérifie la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.
* Montrons que la fonction est solution de l’équation différentielle

est la somme de deux fonctions dérivables du donc est dérivable sur et

donc

La fonction est donc une solution de l’équation différentielle

De plus : soit .

Par analogie :

1. avec la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.
2. avec la définition de la fonction solution de

on adopte l’écriture : Pour tout réel ,

Ainsi, on notera :

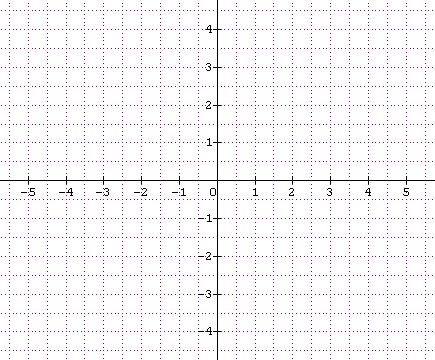
Pour tout réel ,

## Notation

Le nombre complexe noté sous la forme algébrique avec et s’écrit donc aussi

Ainsi, est la notation exponentielle du nombre complexe de module et d’argument

Le nombre complexe a comme image un point du **cercle trigonométrique**.



•

***Exemples :*** , , .

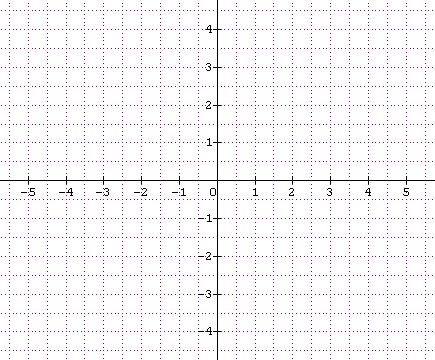
Pour tous réels et :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Formule |  |
|  | |  | | --- | |  | |  |
|  |  |  |
|  | |  | | --- | |  | |  |
|  |  |  |
|  | |  | | --- | |  | |  |
|  |  |  |
|  | |  | | --- | |  | |  |
|  |  |  |
|  | |  | | --- | |  | |  |
|  |  |  |
|  | |  | | --- | |  |   (Formule de De Moivre[[1]](#footnote-1)) |  |

## Forme exponentielle d’un nombre complexe non nul

Soit un nombre complexe non nul.

L’écriture avec et est appelée **forme exponentielle** de .



•

Exemple : le point d’affixe

1. **Moivre** (Abraham **de**), mathématicien britannique d'origine française (Vitry-le-François 1667 - Londres 1754). [↑](#footnote-ref-1)