CHAPITRE 4 : Les nombres complexes

CHAPITRE 4 : Les nombres complexes

<u>1ère PARTIE</u> : Forme algébrique

1 Définition

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme : $\boldsymbol{z = a + ib}$, avec a et b deux réels et i un nombre tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

1.1 Théorème

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$.

Cette forme s'appelle ***forme algébrique***.

1.2 Définitions

a, noté $Re(z)$, est appelé ***la partie réelle de z***.

b, noté $Im(z)$, est appelé ***la partie imaginaire de z.***

<u>Cas particuliers</u> : $a = 0$ *équivaut à* le nombre complexe est **imaginaire pur**.

$b = 0$ *équivaut à* le nombre complexe est **réel**.

1.3 Théorème

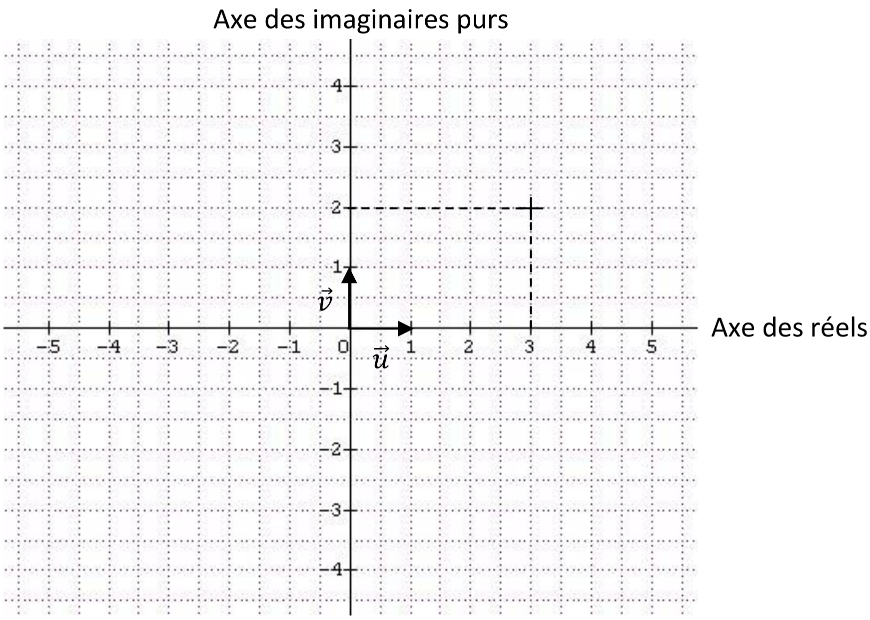
• Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

• $z = 0$ équivaut à $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

<u>Exemple :</u>

Représentation du nombre complexe $z = 3 + 2i$

$Re(z) = 3$
$Im(z) = 2$



2 Nombre complexe conjugué

2.1 Définition

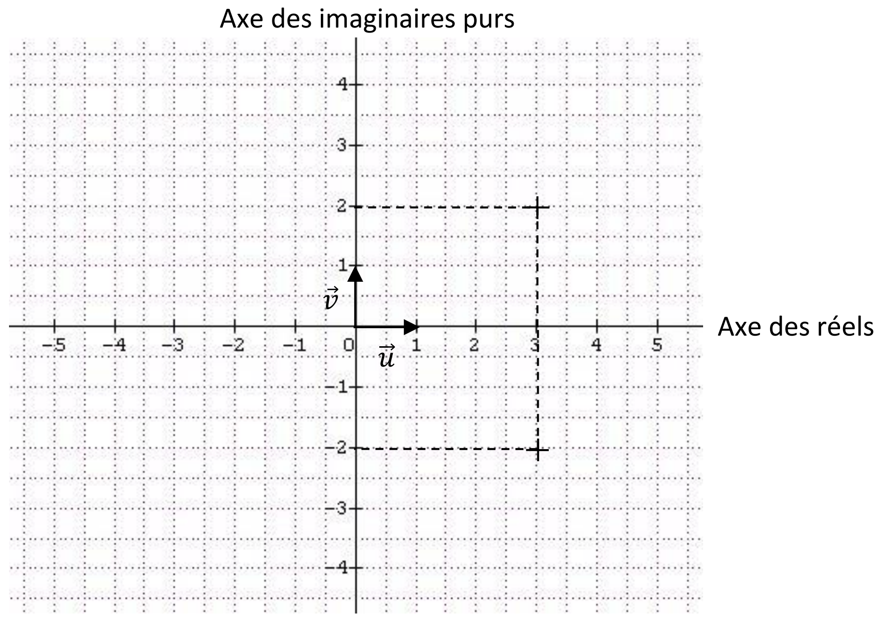
Soit z le nombre complexe tel que $z = a + ib$.
Le nombre conjugué de z, noté $\bar{z}$ est tel que $\bar{z} = a - ib$.

Représentation du nombre complexe $z = 3 + 2i$

et de son conjugué $\bar{z} = 3 - 2i$

$Re(z) = 3$
$Im(z) = 2$

$Re(\bar{z}) = 3$
$Im(\bar{z}) = -2$



2.2 Théorème 1

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a : $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
$z\bar{z}$ est donc un réel.

<u>Démonstration</u> : $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$.

2.3 Théorème 2

Pour tous nombres complexes z et z' :

(1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

(3) $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$

(4) Pour tout $z \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

(5) Pour tout $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

(6) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Démonstrations :

(1) $z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$
donc $\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b')$

Et $\bar{z} + \overline{z'} = a - ib + a' - ib' = (a + a') - i(b + b')$

D'où le résultat : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

(2) $\bar{\bar{z}} = \left(\overline{a - ib}\right) = a - (-ib) = a + ib = z$

(3) $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$
donc $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$

Et $\bar{z}.\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') + i(-ab' - a'b) = (aa' - bb') - i(a'b + ab')$

D'où le résultat : $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$

(4) $$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad \text{donc} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

Et $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{a - ib} \times \dfrac{a + ib}{a + ib} = \dfrac{a + ib}{a^2 + b^2}$

D'où le résultat : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

(5) $$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

(6) Démontrons par récurrence l'égalité $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : $z^0 = 1$ donc $\overline{z^0} = 1$ et $1 = (\bar{z})^0$ d'où le résultat $\overline{z^0} = (\bar{z})^0$
- Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $\overline{z^k} = (\bar{z})^k$
  Montrons qu'alors $\overline{(z^{k+1})} = (\bar{z})^{k+1}$

$$\overline{(z^{k+1})} = \overline{(z^k \times z)} = \overline{z^k} \times \bar{z} = (\bar{z})^k \times \bar{z} = (\bar{z})^{k+1}$$

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

On admet l'égalité $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ pour tout n entier négatif :

2.4 Théorème 3

Soit z un nombre complexe.

(1) z est un réel équivaut à $z = \bar{z}$.

(2) z est un imaginaire pur équivaut à $z = -\bar{z}$.

2.5 Théorème 4

Quel que soit le nombre complexe z :

- $z + \bar{z}$ est un réel
- $z - \bar{z}$ est un imaginaire pur

Exemple : Soit $z = 3 + 2i$ et $\bar{z} = 3 - 2i$. On a $z + \bar{z} = 6$ et $z - \bar{z} = 4i$.

3 Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c des réels , avec $a \neq 0$.

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Elle admet :

• Si $\Delta > 0$ deux solutions réelles $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

• Si $\Delta = 0$ une solution réelle double $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{\dots}}$

• Si $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

Démonstration :

- Mise sous forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$:

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right]$$

$$z^2 + \frac{b}{a}z \qquad \text{est le début de} \qquad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Factorisation

Si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on retrouve les résultats vus en première.

Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$az^2 + bz + c = a[(z - z_1) \times (z - z_2)]$$

- Conclusion

Si $\Delta < 0$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions qui sont les nombres complexes conjugués :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$

L'équation est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$.

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(10)$ $\Delta = -4$ $\Delta < 0$

Donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{6 - i\sqrt{4}}{2}$ et $z_2 = \frac{6 + i\sqrt{4}}{2}$

$z_1 = \frac{6 - 2i}{2}$ et $z_2 = \frac{6 + 2i}{2}$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ est $S = \{3 - i\,;3 + i\}$

4 Nombres complexes et géométrie

4.1 Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

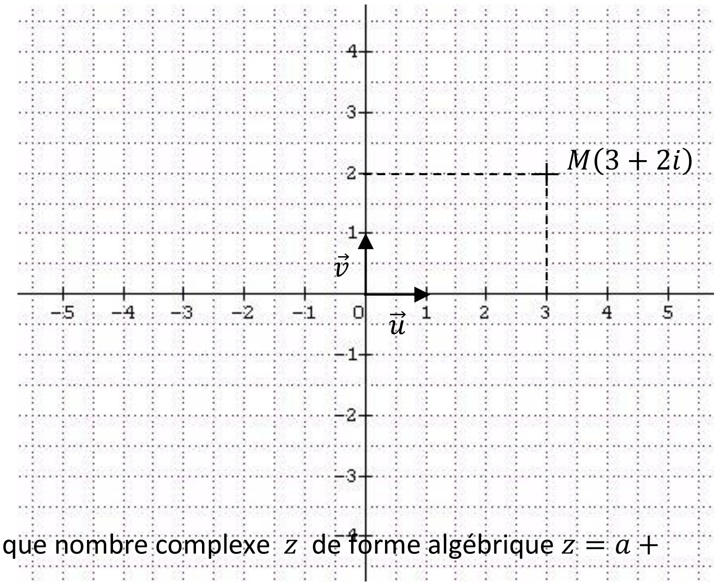
• On représente le nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ par le point M de coordonnées $(a\,; b)$.

On dit que le point M est l'***image*** du complexe z et que le complexe z est l'***affixe*** du point M.

Pour écrire « le point Md'affixe z » on écrit $\boldsymbol{M(z)}$ où z est un nombre complexe.

Exemple :

Placer dans le plan complexe
le point M d'affixe $z = 3 + 2i$



On a donc associé à chaque nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$, le point M de coordonnées $(a\,; b)$.

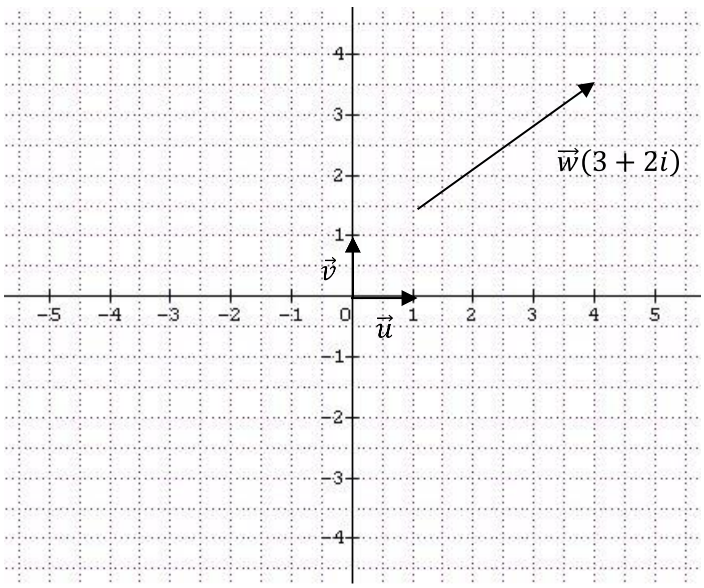
• Par ailleurs, il est possible d'associer à chaque nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$, le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,; b)$.

z est ***l'affixe*** du vecteur $\vec{w}$.

On note $\vec{w}(z)$.

Exemple :

Représenter dans le plan complexe
le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z = 3 + 2i$



• L'axe $(O;\vec{u})$ est appelé ***axe des réels*** , l'axe $(O;\vec{v})$ l'***axe des imaginaires purs***.

• Le plan dans lequel les points sont repérés par leur affixe est appelé le ***plan complexe***.

4.2 Lien avec la géométrie

On considère les points $M(z)$, $M'(z')$ et $M_1(z_1)$ du plan complexe.

• $z' - z$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$

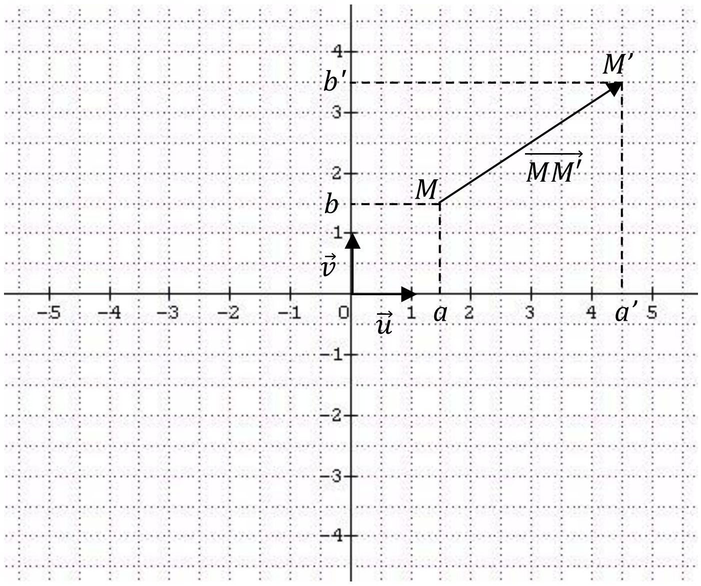
Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

Alors $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$

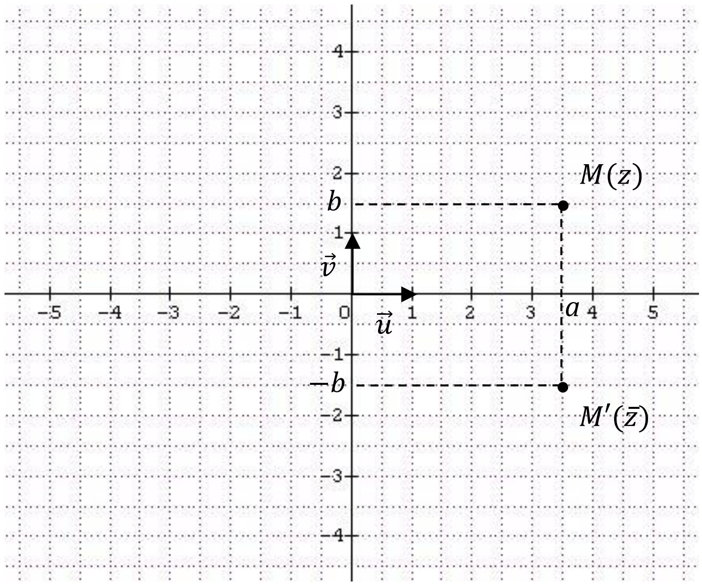
Cas particulier :

$\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z - 0 = z$

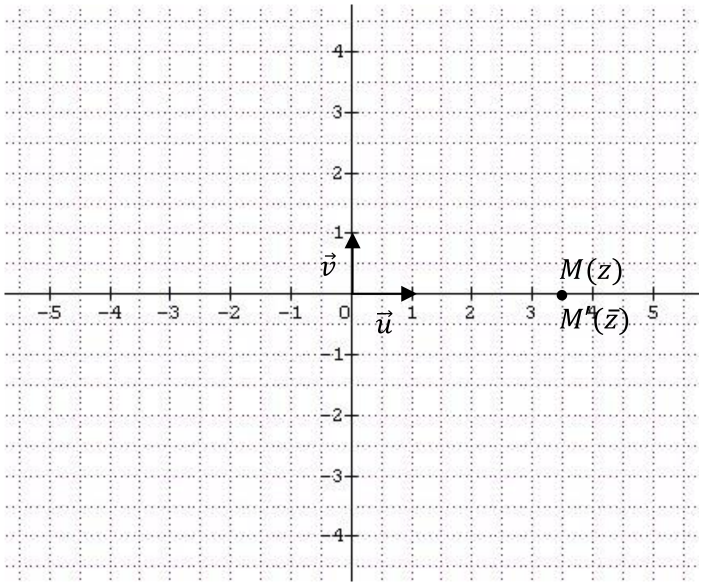
$\overrightarrow{OM}$ a la même affixe que M.



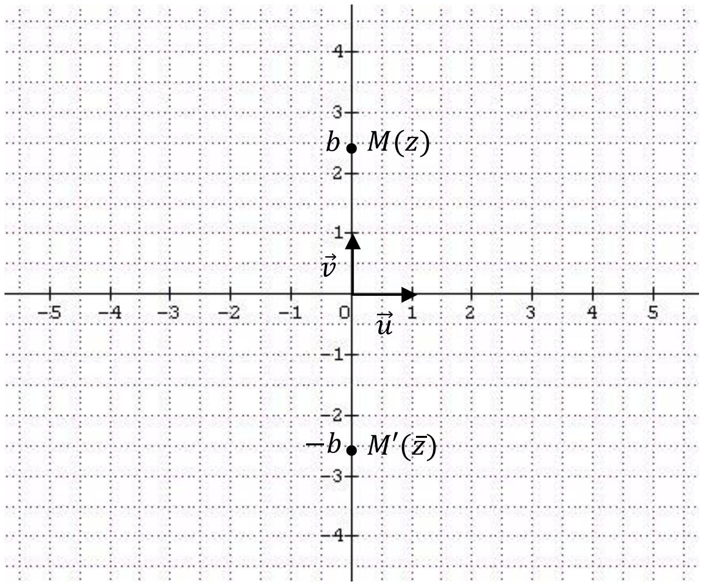
• $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



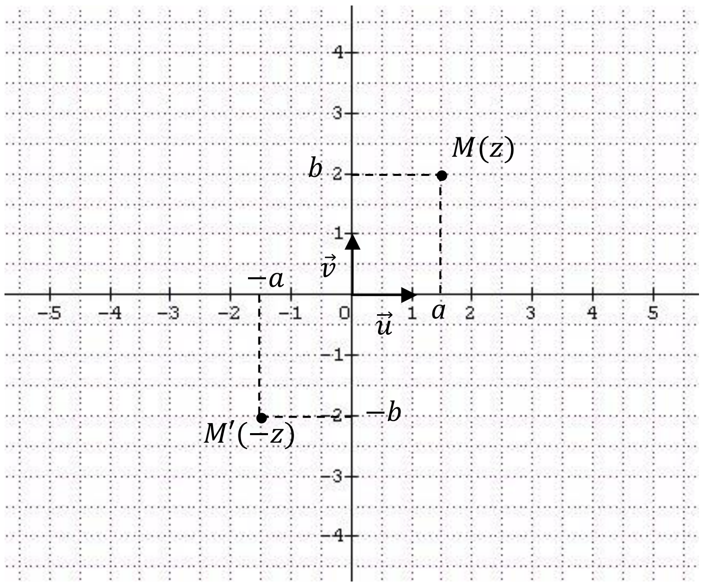
- $z = \bar{z}$ équivaut à $M(z)$ appartient à l'axe des réels.



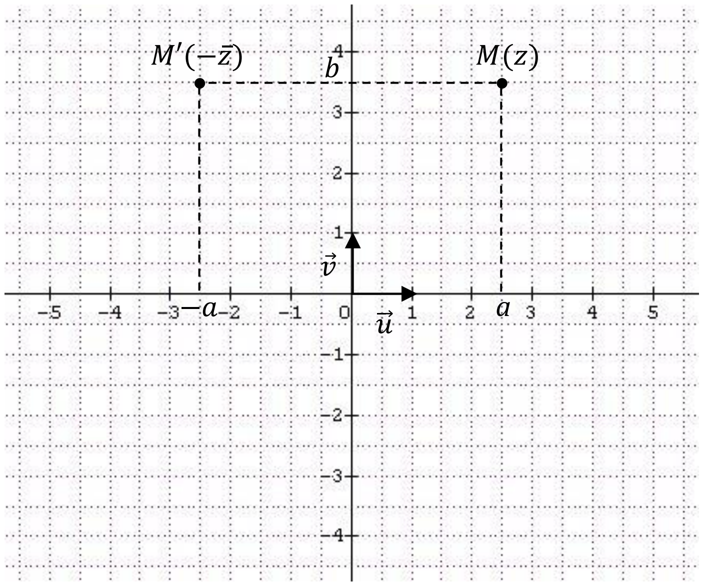
- $z = -\bar{z}$ équivaut à $M(z)$ appartient à l'axe des imaginaires purs.



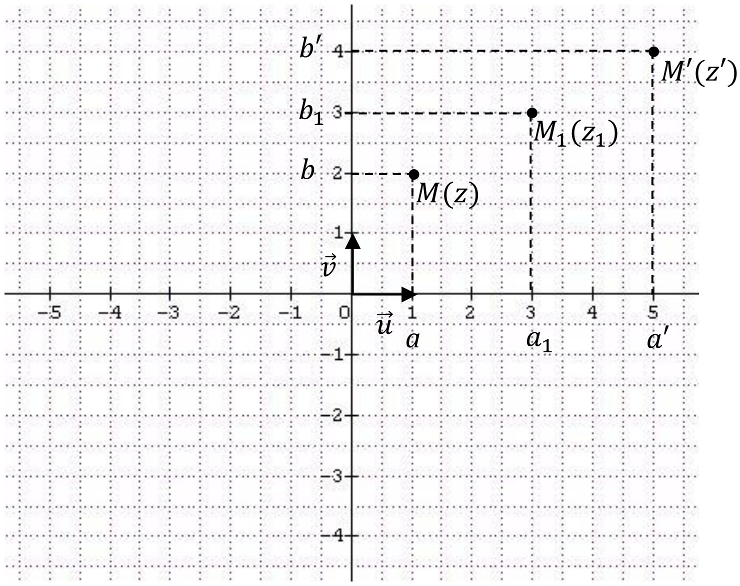
- $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport au point O



- $M(z)$ et $M'(-\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs.



- $M(z)$ et $M'(z')$ ont pour milieu le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{z+z'}{2}$



2ème PARTIE : Forme trigonométrique

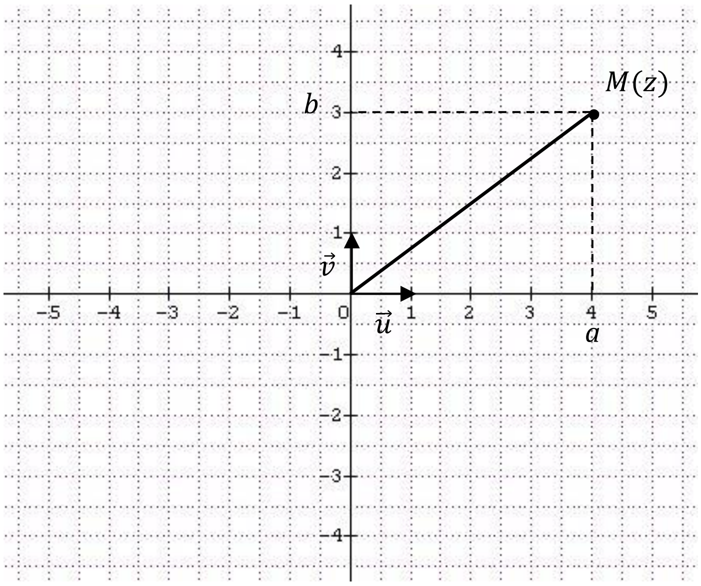
5 Module et arguments d'un nombre complexe

5.1 Module

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$ (a et b réels).
Le module de z, noté $|z|$, est le réel défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Interprétation géométrique :
Dans le plan complexe, si M a pour affixe z alors $|z| = OM$

Exemple :
Soit $z = 4 + 3i$. Calculer $r = |z|$.



Théorème : Pour tout nombre complexe z, on a : $z \times \bar{z} = |z|^2$

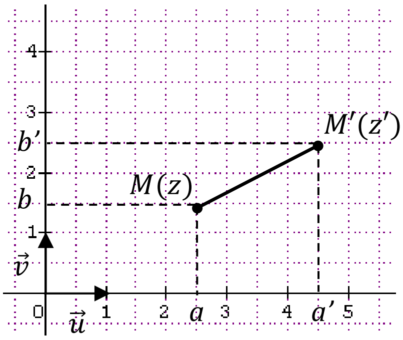
Démonstration :

1. Soit $z = a + ib$. Calculer $z \times \bar{z}$.
2. Comparer à $|z|^2$.

Module et distance

Soit les points $M(a\,; b)$ et $M'(a'; b')$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}\,, \vec{v})$.

1. Avec les coordonnées :
$$MM' = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$$



2. Avec les affixes :
On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$
On a $M(z)$, $M'(z')$ et donc $\overrightarrow{MM'}(z' - z)$.

$z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$

$|z' - z| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$

Conclusion :

$$|z' - z| = MM'$$

5.2 Arguments

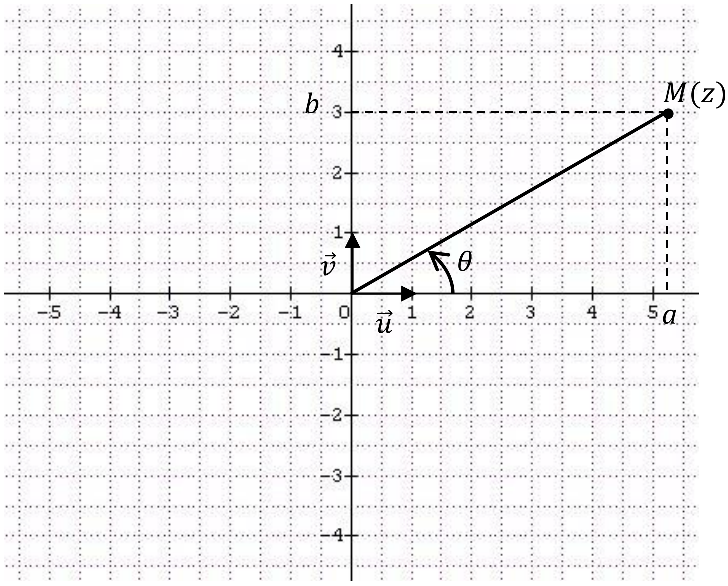
Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Un argument de z, noté $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Exemple :

Soit $z = 3\sqrt{3} + 3i$.

Calculer $\theta = \arg(z)$.



Remarques :

- 0 n'a pas d'argument.
- Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments.
Si θ est l'un d'entre eux, tout autre est de la forme $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5.3 Forme trigonométrique

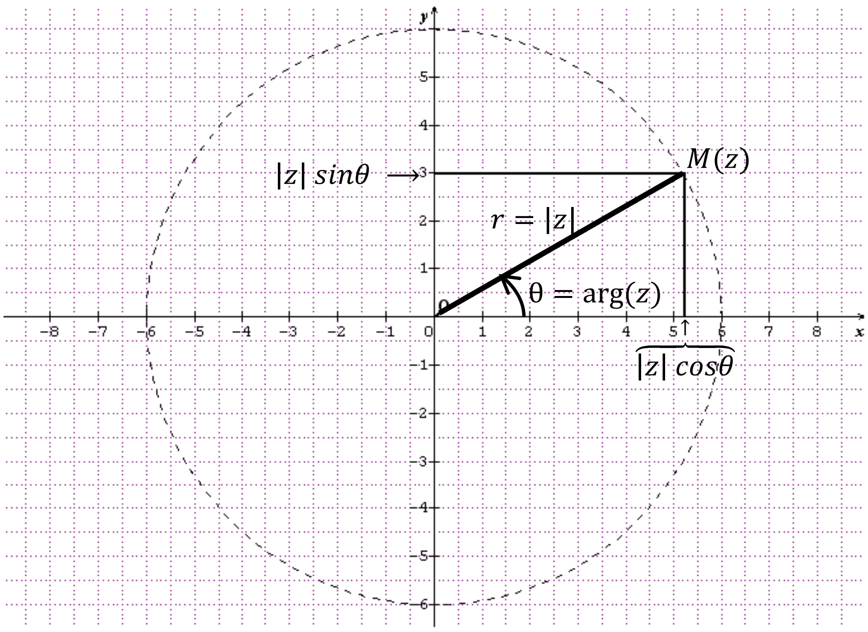
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$.

Soit r le module de z et θ un argument de z.

On a alors : $\begin{cases} a = r.cos\theta \\ b = r.sin\theta \end{cases}$

Ainsi $z = r(cos\theta + i.sin\theta)$.

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du complexe z.



Exemple :

Soit le nombre complexe z écrit sous la forme algébrique $z = 3\sqrt{3} + 3i$.
Ecrire z sous la forme trigonométrique.

Propriétés :

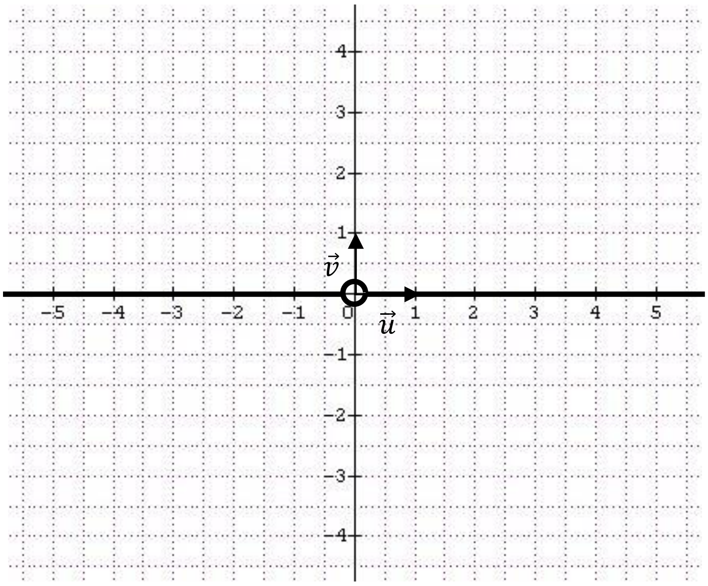
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si un nombre complexe z s'écrit $z = r(cos\theta + i.sin\theta)$ avec $r > 0$
alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

6 Propriétés du module et des arguments

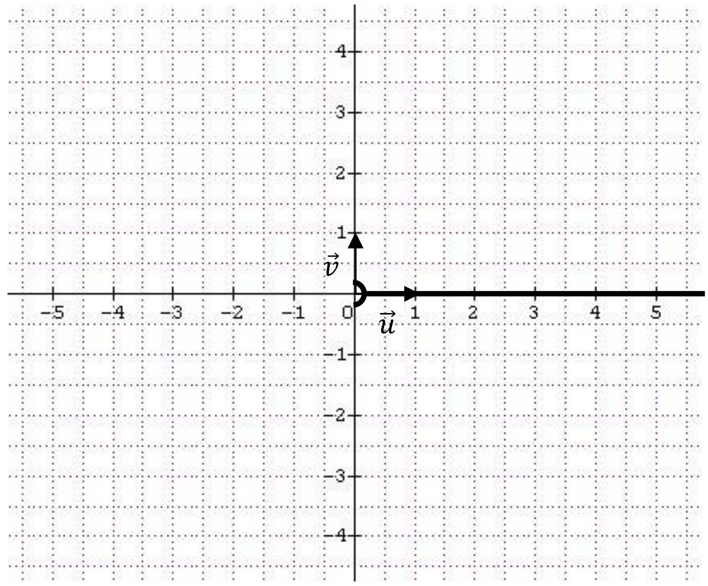
6.1 Arguments d'un réel, d'un imaginaire pur

Soit z un nombre complexe non nul.

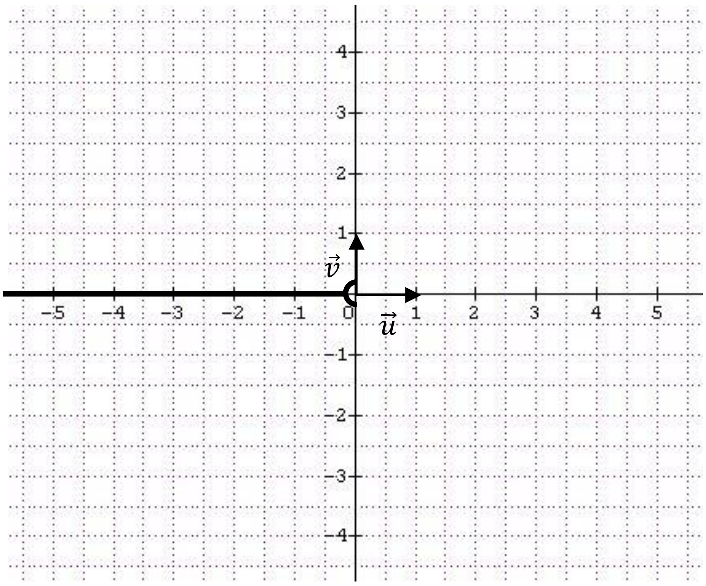
- z est un nombre réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0[\pi]$



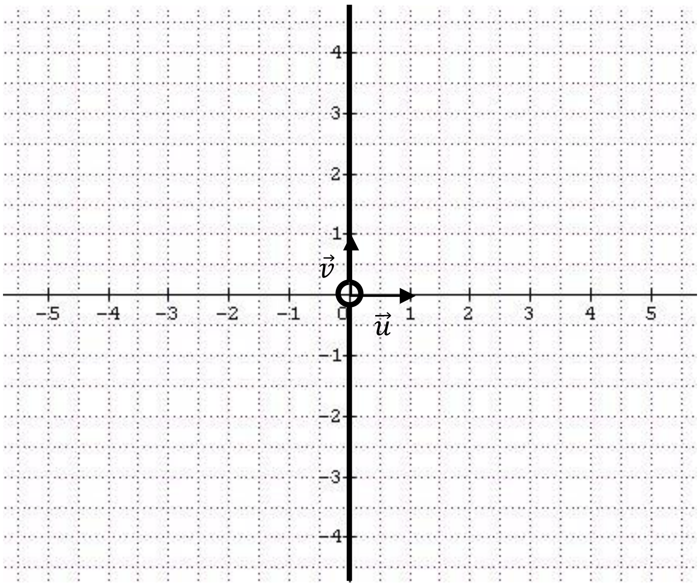
- z est un nombre réel strictement positif si et seulement si $\arg(z) = 0[2\pi]$



- z est un nombre réel strictement négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi[2\pi]$



- z est un nombre imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$



6.2 Propriétés du module

(1) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$

Démonstration :

Soit $z = x + iy$

- $|z| = 0$

équivaut successivement à :

- $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$
- $x^2 + y^2 = 0$
- $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- $z = 0$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$

Démonstration :

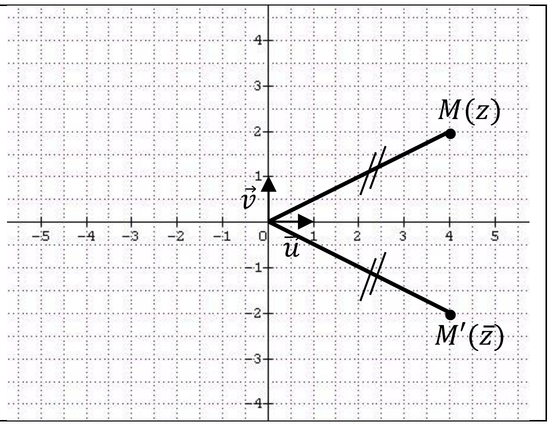
Soit $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

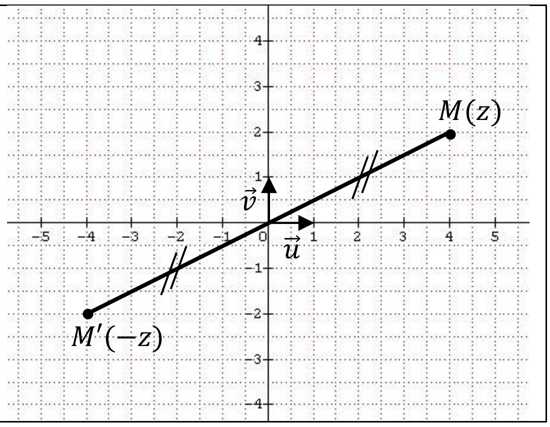
$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

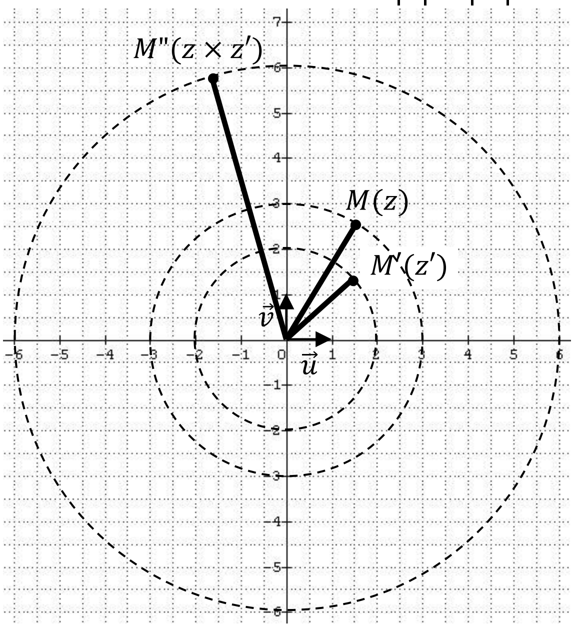
Donc $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$



(3) $\forall z \in \mathbb{C}, |-z| = |z|$



(4) $\forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z'}) \in \mathbb{C}^2, |\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{z'}| = |\boldsymbol{z}| \times |\boldsymbol{z'}|$



<u>Démonstration :</u>

<u>$\forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z'}) \in \mathbb{C}^{*2}$:</u>

Si $z = r(cos\theta + isin\theta)$

et $z' = r'(cos\theta' + isin\theta')$

Alors $|z| = r$ et $|z'| = r'$

$$zz' = r(cos\theta + isin\theta) \times r'(cos\theta' + isin\theta')$$

$$zz' = rr'[(cos\theta cos\theta' - sin\theta sin\theta') + i(sin\theta cos\theta' + cos\theta sin\theta')]$$

$$zz' = rr'[cos(\theta + \theta') + isin(\theta + \theta')]$$

C'est la forme trigonométrique d'un complexe de module rr'

Conclusion :

$\forall(z,z') \in \mathbb{C}^{*2}, |z \times z'| = |z| \times |z'|$

<u>Si z ou z' est nul :</u>

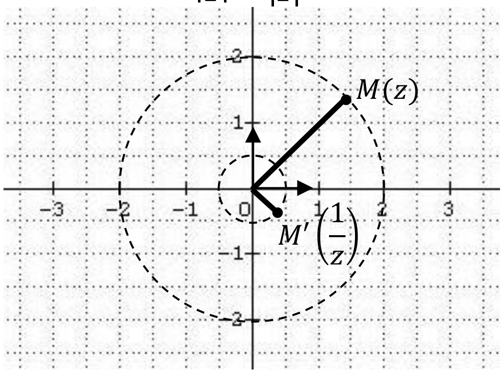
Alors $z \times z' = 0$ et $|z \times z'| = 0$

et $|z| = 0$ ou $|z'| = 0$ donc $|z| \times |z'| = 0$

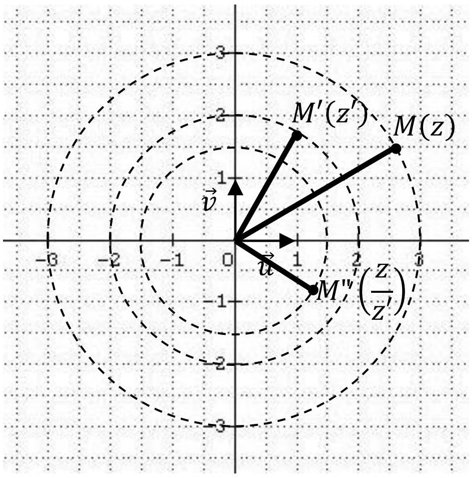
<u>Conclusion :</u>

$\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2, |z \times z'| = |z| \times |z'|$

(5) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$



(6) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$



<u>Démonstration :</u>

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

D'après la propriété (4) :

$\left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right|$

D'après la propriété (5) :

$\forall z' \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$

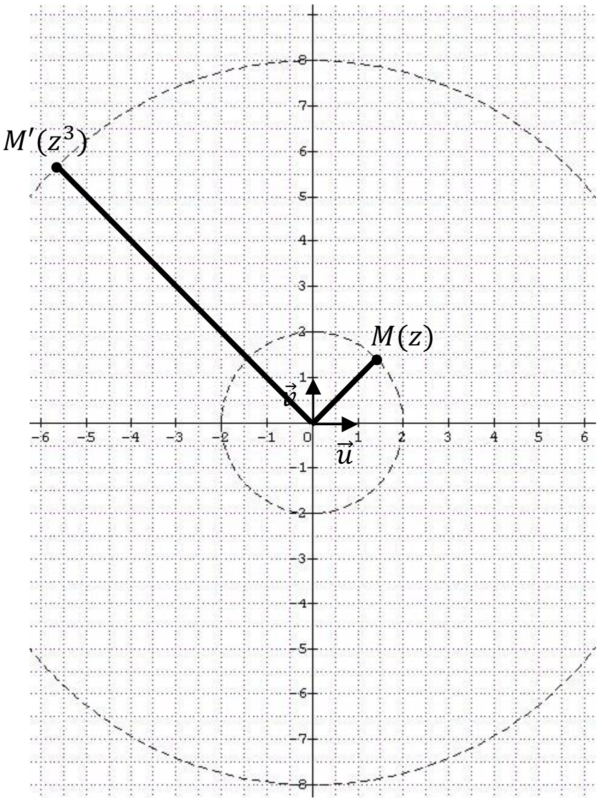
Donc

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|}$$

Conclusion :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

(7) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |z^n| = |z|^n$



Démonstration :

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

$\forall z \in \mathbb{C},\ z^1 = z$

Donc $z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |z^1| = |z|^1$

Hérédité :

Supposons que pour un entier naturel non nul k donné, on ait :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z^k| = |z|^k$$

On sait que :

$|z^{k+1}| = |z^k \times z|$.

D'après la propriété (4) :

$|z^k \times z| = |z^k| \times |z|$

Donc :

$|z^{k+1}| = |z^k| \times |z|$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z^k| = |z|^k$$

Donc :

$|z^{k+1}| = |z|^k \times |z|$

$$|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$$

Ainsi la propriété est vraie pour l'entier naturel $k + 1$.

Conclusion :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |z^n| = |z|^n$$

Remarque 1 :

On admet que la propriété (7) est vraie aussi lorsque n est un entier négatif non nul :

Remarque 2 :

La propriété (7) est vraie aussi lorsque n est nul

(8) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

(inégalité triangulaire)

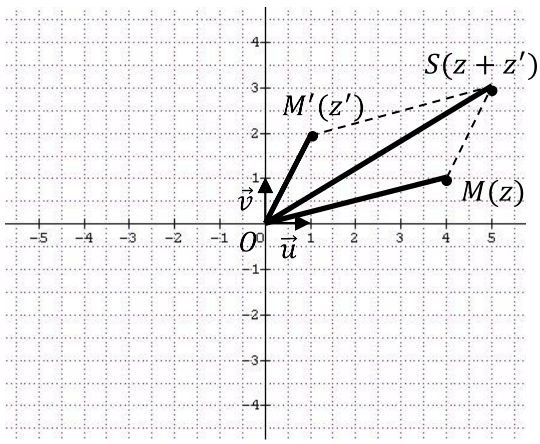
Remarque :

En général :

$$|z + z'| \neq |z| + |z'|$$

Démonstration :

Soit $M(z)$, $M'(z')$ et $S(z + z')$



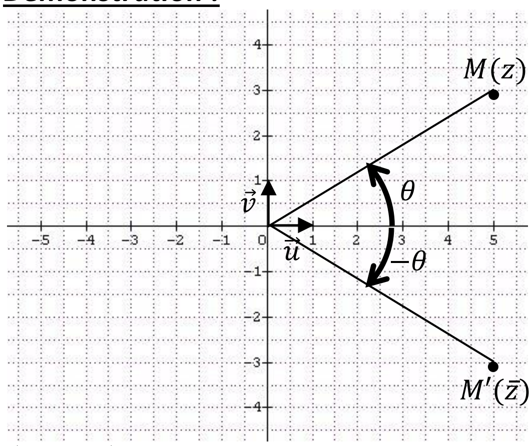
On a : $\begin{cases} |z + z'| = OS \\ |z| = OM \\ |z'| = OM' \end{cases}$

6.3 Propriétés des arguments

z et z' sont deux nombres complexes non nuls.

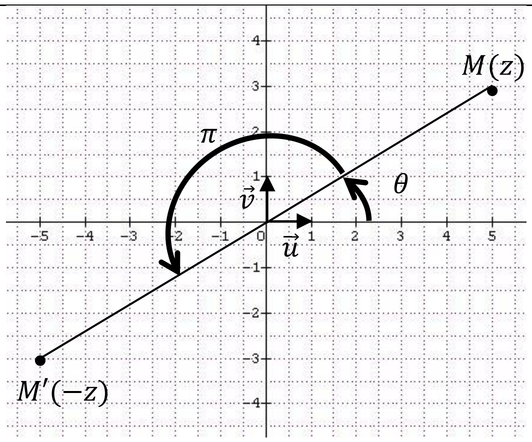
(1) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration :



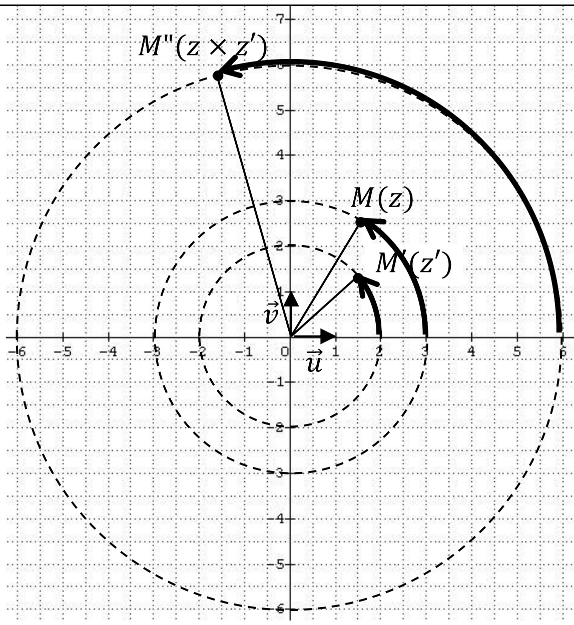
$\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$ équivaut à $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$



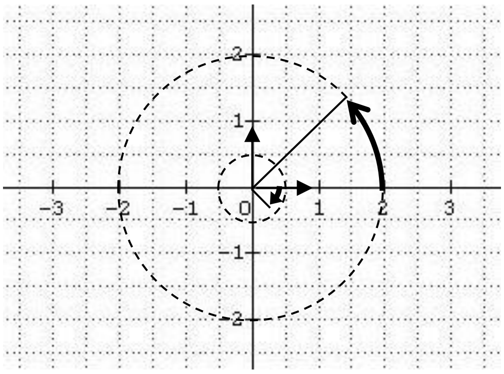
(3) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}$,

$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$



(4)

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ \ [2\pi]$$



Démonstration :

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \dfrac{1}{z} \times z = 1$

D'après la propriété (3) :

$\arg\left(\dfrac{1}{z} \times z\right) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) + \arg(z)\ [2\pi]$

Comme $\frac{1}{z} \times z = 1$

Alors $\arg\left(\frac{1}{z} \times z\right) = \arg(1)\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{1}{z} \times z\right) = 0\ [2\pi]$

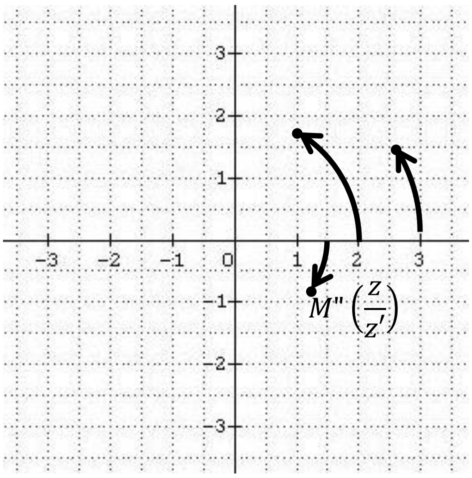
Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) + \arg(z) = 0\ [2\pi]$

Conclusion :

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ \ [2\pi]$

(5)

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2},\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]$$



Démonstration :

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \qquad \dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$

D'après la propriété (3) :

$\arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)\ \ [2\pi]$

D'après la propriété (4) :

$\forall z' \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = -\arg(z')\ \ [2\pi]$

Donc

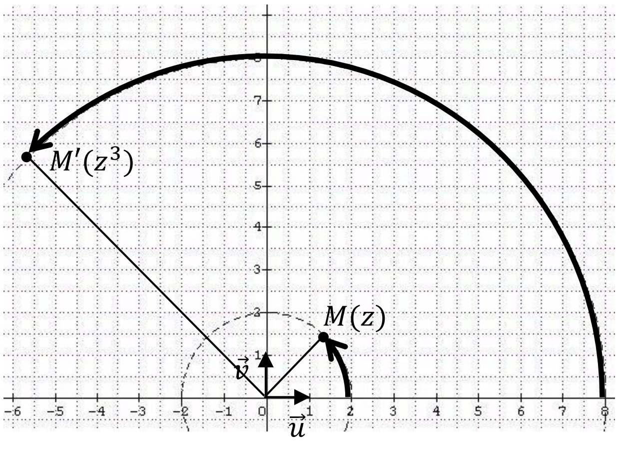
$\arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Conclusion :

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^{*2}, \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi]$

(6)

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \arg(z^n) = n \times \arg(z)\ \ [2\pi]$$



Remarque 1 :

La propriété (6) est vraie aussi lorsque n est un entier négatif non nul :

Remarque 2 :

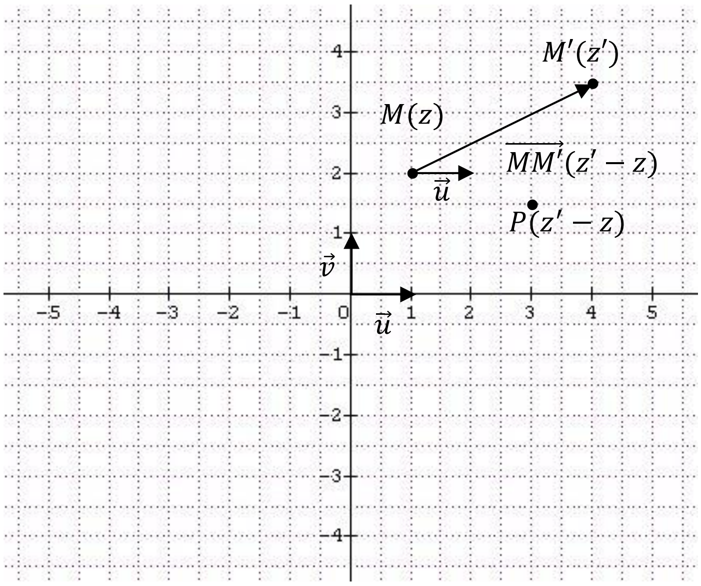
La propriété (6) est vraie aussi lorsque n est nul

7 Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $M(z)$, $M'(z')$ tels que M et M' soient distincts.

$$|z'-z| = MM'$$

$$\arg(z'-z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{MM'}\right)\ [2\pi]$$

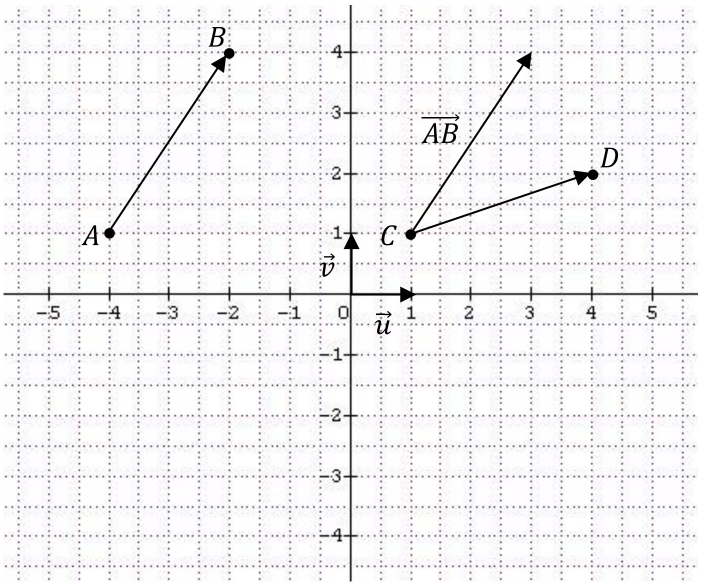


On considère les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $D(z_D)$ distincts deux à deux.

$$\boxed{\left|\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right| = \frac{AB}{CD}}$$

Démonstration :

$$\left|\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right| = \frac{|z_B-z_A|}{|z_D-z_C|} = \frac{AB}{CD}$$

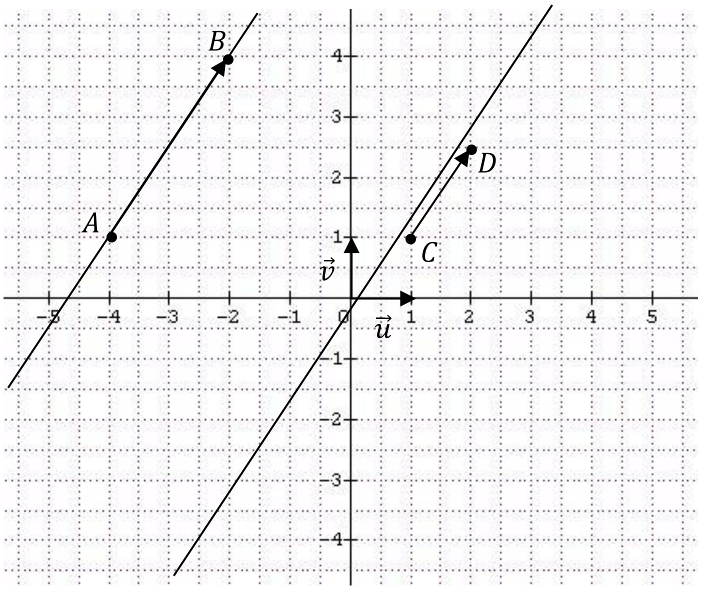


$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)\ [2\pi]}$$

Démonstration :

$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) = \arg(z_B-z_A) - \arg(z_D-z_C)\quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) - \left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right)\quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{CD},\vec{u}\right)\quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right)\quad [2\pi]$$

Cas particuliers :

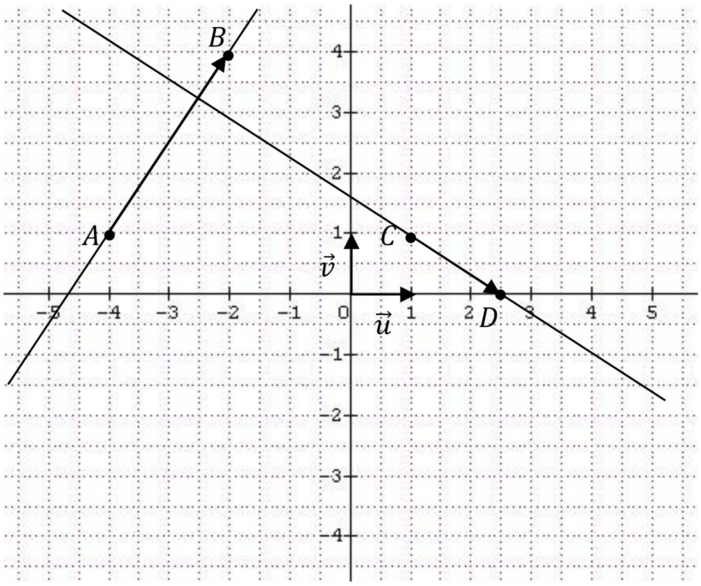


(AB) et (CD) sont parallèles équivaut à : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est un réel non nul

Démonstration :
(AB) et (CD) sont parallèles équivaut successivement à :
$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = 0 \quad [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \pi \quad [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = 0 \quad [2\pi] \ ou \ = \pi \quad [2\pi]$$

$\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est un réel non nul



(AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut à : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est un imaginaire pur non nul

Démonstration :
(AB) et (CD) sont perpendiculaires équivaut successivement à :

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

ou $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \ ou \ = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est un imaginaire pur non nul

8 Notation exponentielle

8.1 Fonction $f : \theta \mapsto cos\theta + isin\theta$

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = cos\theta + i\ sin\theta$

- Montrons que la fonction f vérifie la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

$f(\theta) \times f(\theta') = (cos\theta + i\ sin\theta)(cos\theta' + i\ sin\theta')$

$f(\theta) \times f(\theta') = cos\theta\ cos\theta' + i\ cos\theta\ sin\theta' + i\ sin\theta\ cos\theta' - sin\theta\ sin\theta'$

$f(\theta) \times f(\theta') = cos\theta\ cos\theta' - sin\theta\ sin\theta' + i\ (sin\theta\ cos\theta' + cos\theta\ sin\theta')$

$f(\theta) \times f(\theta') = cos(\theta + \theta') + i\ sin(\theta + \theta')$

$f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

- Montrons que la fonction f est solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y' = i\,y \\ f(0) = 1 \end{cases}$

f est la somme de deux fonctions dérivables du $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(\theta) =- sin\theta + i\,cos\theta$ donc $f'(\theta) = i\,f(\theta)$.

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle $y' = i\,y$

De plus : $f(0) = cos0 + i\,sin0$ soit $f(0) = 1$.

Par analogie :

1. avec la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.
2. avec la définition de la fonctionf_k solution de $\begin{cases} y' = ky,\ k \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

on adopte l'écriture : Pour tout réel θ, $f(\theta) = e^{i\theta}$

Ainsi, on notera :

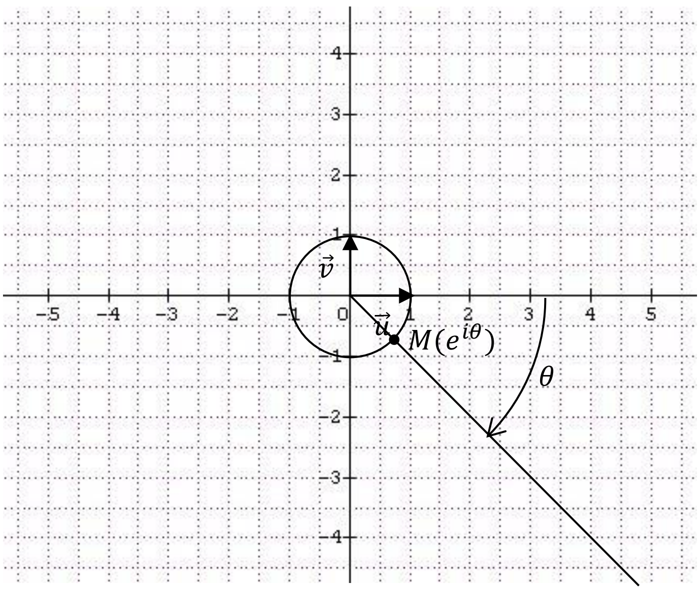
Pour tout réel θ, $\boldsymbol{cos\theta + i\,sin\theta = e^{i\theta}}$

8.2 Notation $e^{i\theta}$

Le nombre complexe noté sous la forme algébrique $a + ib$ avec $\boldsymbol{a = cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = sin\theta}$ s'écrit donc aussi $\boldsymbol{e^{i\theta}}$

Ainsi, $z = e^{i\theta}$ est la notation exponentielle du nombre complexe de module 1 et d'argument θ $z = cos\theta + i\,sin\theta$

Le nombre complexe $z = \boldsymbol{e^{i\theta}}$ a comme image un point M du **cercle trigonométrique**.



Exemples : $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

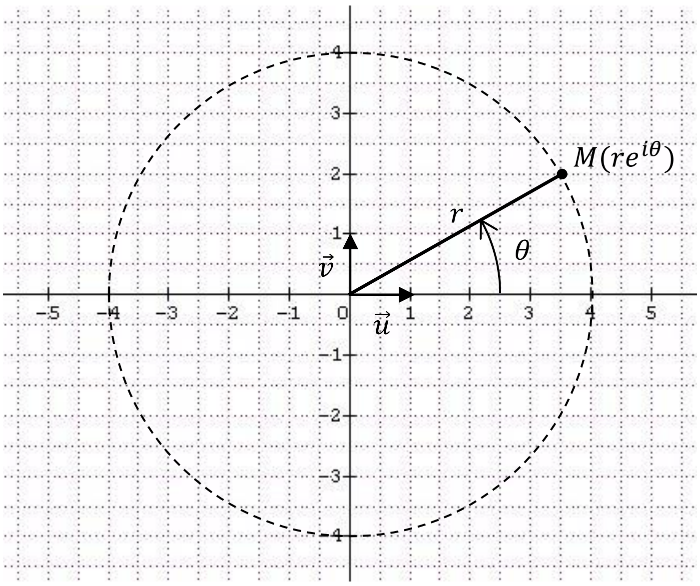
Pour tous réels θ et θ':

	Formule
(1)	$\left\|e^{i\theta}\right\| = 1$
(2)	$\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta$
(3)	$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
(4)	$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
(5)	$\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
(6)	$\forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (Formule de De Moivre[1])

8.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture $z = r.e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ est appelée **forme exponentielle** de z.



Exemple : le point M d'affixe $4e^{i\frac{\pi}{6}}$

[1] **Moivre** (Abraham **de**), mathématicien britannique d'origine française (Vitry-le-François 1667 - Londres 1754).