CHAPITRE 5  : Conditionnement et indépendance

[1 Probabilité conditionnelle 2](#_Toc460272351)

[1.1 Définition 2](#_Toc460272352)

[1.2 Utilisation d’un arbre pondéré 3](#_Toc460272353)

[2 Formule des probabilités totales 4](#_Toc460272354)

[2.1 Définition 4](#_Toc460272355)

[2.2 Formule des probabilités totales 4](#_Toc460272356)

[3 Indépendance 5](#_Toc460272357)

[3.1 Indépendance de deux événements 5](#_Toc460272358)

[3.2 Indépendance et événements contraires 5](#_Toc460272359)

CHAPITRE 5  : Conditionnement et indépendance

# Probabilité conditionnelle

## Définition

On considère une expérience aléatoire, $A$ et $B$ sont deux événements avec $p(A)\ne 0$.

La probabilité de $B$, sachant que $A$ est réalisé, est notée $P\_{A}(B)$, et :

$$P\_{A}\left(B\right)=\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(A\right)}$$

***Exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les événements : $A$ :  « l’élève étudie l’allemand »

 $F$ : «  l’élève est une fille ».

On peut calculer $P\_{F}\left(A\right)$ :

* directement en considérant comme univers l’ensemble des 150 filles :

|  |  |
| --- | --- |
| $$P\_{F}\left(A\right)=\frac{30}{150}$$ | $$P\_{F}\left(A\right)=\frac{1}{5}$$ |

* ou utilisant la définition de la probabilité conditionnelle :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$P\_{F}\left(A\right)=\frac{P\left(A∩F\right)}{P\left(F\right)}$$ | avec | $$P\left(A∩F\right)=\frac{30}{250}$$ | et | $$P\left(F\right)=\frac{150}{250}$$ | Soit | $$P\_{F}\left(A\right)=\frac{30}{250}×\frac{250}{150}=\frac{1}{5}$$ |

## *arbre p2.jpg*Utilisation d’un arbre pondéré

***Exemple :***

$$P\left(\overbar{F}\right)=1-P\left(F\right) $$

$$ P\left(\overbar{F}\right)=1-\frac{3}{5} P\left(\overbar{F}\right)=\frac{2}{5}$$

Le chemin en gras représente l'événement $A∩F$

***Règles pratiques*** :

* La somme des probabilités affectées aux branches issues d’un même nœud est égale à 1.
* La probabilité d’un résultat est égale au produit des probabilités qui conduisent à ce résultat. En effet : $P\left(A∩F\right)=P\_{F}\left(A\right)×P\left(F\right)$

|  |  |
| --- | --- |
| $$P\_{A}\left(B\right)=\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(A\right)}⟺P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\_{A}\left(B\right)$$ |  |
| $$P\_{B}\left(A\right)=\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(B\right)}⟺P\left(A∩B\right)=P\left(B\right)×P\_{B}\left(A\right)$$ |  |

# Formule des probabilités totales

## Définition

Dire que les événements $B\_{1} , B\_{2}, …,B\_{n}$ forment **une partition** de l’univers signifie que :

* Aucun des événements $B\_{1} , B\_{2}, …,B\_{n}$ n'a une probabilité nulle.
* Les événements $B\_{1} , B\_{2}, …,B\_{n}$ sont deux à deux incompatibles[[1]](#footnote-1).
* Leur réunion est l’univers $Ω$.

*Une partition de* Ω

## Formule des probabilités totales

Si les événements $B\_{1} , B\_{2}, …,B\_{n}$ forment une partition de l’univers, la probabilité d’un événement quelconque $A$ est :

$P\left(A\right)=P\left(A∩B\_{1}\right)+P\left(A∩B\_{2}\right)+…+P\left(A∩B\_{n}\right)$



$$A$$

L'événement $A$ est ici représenté par la réunion des trois chemins en gras.

# Indépendance

## Indépendance de deux événements

Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants lorsque la probabilité de l’un ne dépend pas de la réalisation de l’autre, soit :

$$P\_{A}\left(B\right)=P\left(B\right) ou P\_{B}\left(A\right)=P\left(A\right)$$

***Conséquence***:

Deux événements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\left(B\right)$

***Démonstration***:

$P\_{B}\left(A\right)=P\left(A\right)$ équivaut successivement à :

$$\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(B\right)}=P\left(A\right)$$

$$P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\left(B\right)$$

## Indépendance et événements contraires

Si deux événements $A$ et $B$ sont indépendants alors:

* $\overline{A} $ et $B$ sont indépendants
* $\overline{A} $ et $\overline{B}$ sont indépendants
* $A $ et $\overline{B}$ sont indépendants

***Démontrons que*** $\overline{A} $ ***et*** $B$ ***sont indépendants***

On sait que : $P\left(A∩\overline{B}\right)=P\_{A}\left(\overline{B}\right)×P\left(A\right)$.

Or $P\_{A}\left(\overline{B}\right)+P\_{A}\left(B\right)=1$ donc $P\left(A∩\overline{B}\right)=\left(1-P\_{A}\left(B\right)\right)×P\left(A\right)$

Puisque les événements $A$ et $B$ sont indépendants, on a $P\_{A}\left(B\right)=p\left(B\right)$

Donc : $P\left(A∩\overline{B}\right)=\left(1-p\left(B\right)\right)×P\left(A\right)$

 $P\left(A∩\overline{B}\right)=\left(p\left(\overline{B}\right)\right)×P\left(A\right)$

Conclusion :

$A$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

1. Deux événements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide. On dit aussi événements " disjoints ". [↑](#footnote-ref-1)