CHAPITRE 5 : Conditionnement et indépendance

CHAPITRE 5 : Conditionnement et indépendance

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Définition

On considère une expérience aléatoire, A et B sont deux événements avec $p(A) \neq 0$.

La probabilité de B, sachant que A est réalisé, est notée $P_A(B)$, et :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Exemple : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les événements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On peut calculer $P_F(A)$:

- directement en considérant comme univers l'ensemble des 150 filles :

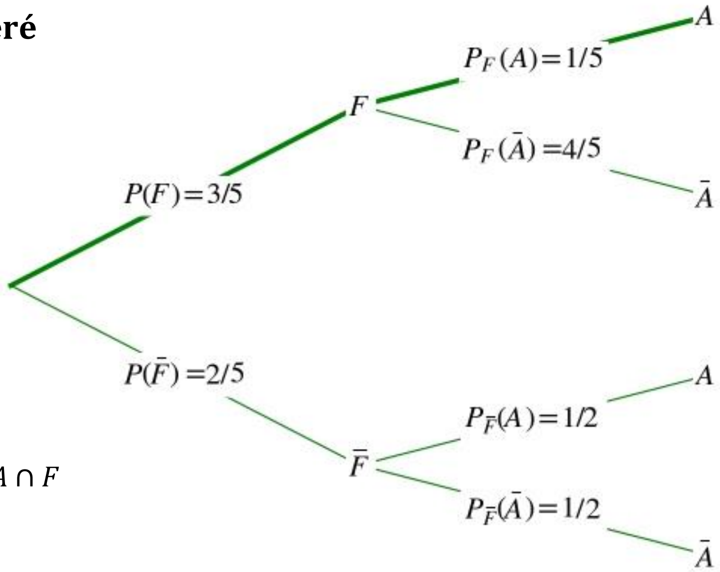
$$P_F(A) = \frac{30}{150} \qquad \boxed{P_F(A) = \frac{1}{5}}$$

- ou utilisant la définition de la probabilité conditionnelle :

$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)}$ avec $P(A \cap F) = \dfrac{30}{250}$ et $P(F) = \dfrac{150}{250}$ Soit $\boxed{P_F(A) = \dfrac{30}{250} \times \dfrac{250}{150} = \dfrac{1}{5}}$

1.2 Utilisation d'un arbre pondéré

Exemple :



$P(\bar{F}) = 1 - P(F)$

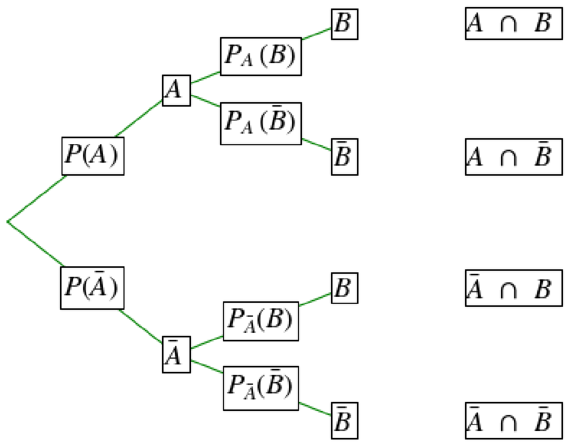
$P(\bar{F}) = 1 - \frac{3}{5}$ $\quad\quad$ $P(\bar{F}) = \frac{2}{5}$

Le chemin en gras représente l'événement $A \cap F$

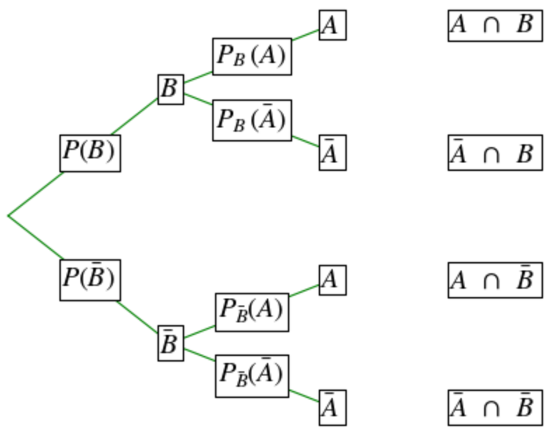
Règles pratiques :

- La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un résultat est égale au produit des probabilités qui conduisent à ce résultat. En effet : $P(A \cap F) = P_F(A) \times P(F)$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$



$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$



2 Formule des probabilités totales

2.1 Définition

Dire que les événements B_1 , $B_2, \dots, B_n$ forment **une partition** de l'univers signifie que :

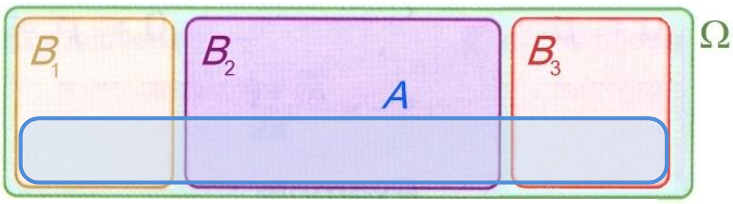
- Aucun des événements B_1 , $B_2, \dots, B_n$ n'a une probabilité nulle.
- Les événements B_1 , $B_2, \dots, B_n$ sont deux à deux incompatibles[1].
- Leur réunion est l'univers Ω.

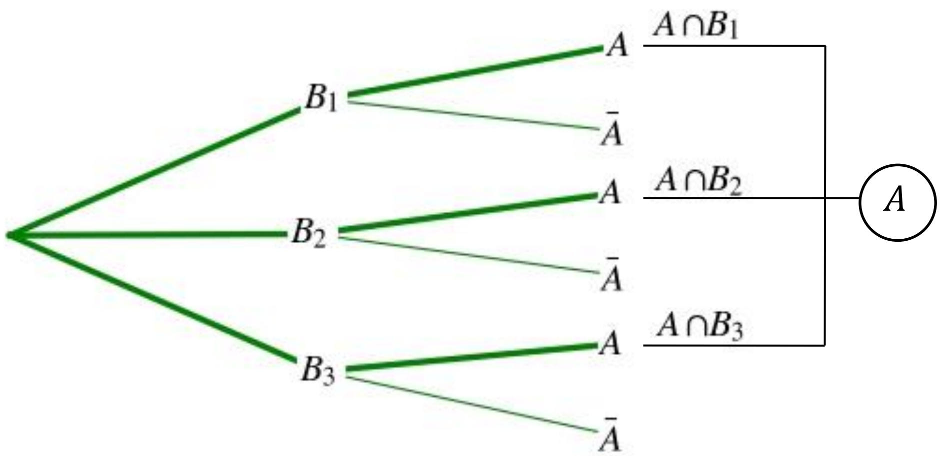
Une partition de Ω

2.2 Formule des probabilités totales

Si les événements B_1 , $B_2, \dots, B_n$ forment une partition de l'univers, la probabilité d'un événement quelconque A est :

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)}$$





L'événement A est ici représenté par la réunion des trois chemins en gras.

[1] Deux événements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide. On dit aussi événements " disjoints ".

3 Indépendance

3.1 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants lorsque la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre, soit :

$$P_A(B) = P(B) \qquad ou \qquad P_B(A) = P(A)$$

<u>Conséquence</u> :

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

<u>Démonstration</u> :

$P_B(A) = P(A)$ équivaut successivement à :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

3.2 Indépendance et événements contraires

Si deux événements A et B sont indépendants alors:

- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants

Démontrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants

On sait que : $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P_A\left(\overline{B}\right) \times P(A)$.

Or $P_A\left(\overline{B}\right) + P_A(B) = 1$ donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = \left(1 - P_A(B)\right) \times P(A)$

Puisque les événements A et B sont indépendants, on a $P_A(B) = p(B)$

Donc : $P\left(A \cap \overline{B}\right) = \left(1 - p(B)\right) \times P(A)$

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = \left(p\left(\overline{B}\right)\right) \times P(A)$$

<u>Conclusion :</u>

A et $\overline{B}$ sont indépendants.