CHAPITRE 6 : Géométrie dans l'espace

CHAPITRE 6 : Géométrie dans l'espace

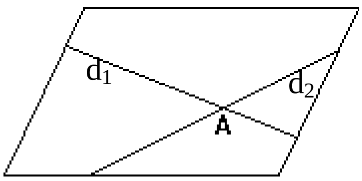
1 Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1.1 Définitions

1.1.a Droites de l'espace

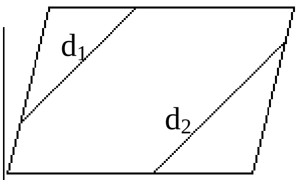
Deux droites de l'espace sont :

• soit **coplanaires**



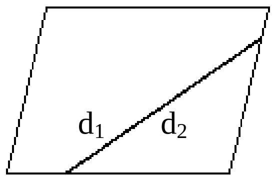
d_1 et d_2 sont sécantes en un point d'intersection A.

On note : $d_1 \cap d_2 = \{A\}$



d_1 et d_2 sont strictement parallèles.

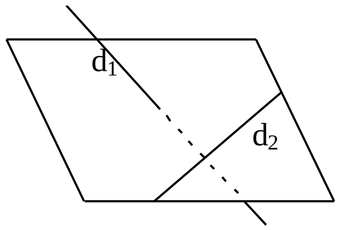
On note : $d_1 \parallel d_2$



d_1 et d_2 sont confondues.

$d_1 = d_2$

• soit **non coplanaires**

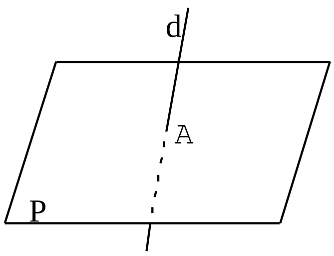


Aucun plan ne contient d_1 et d_2.

1.1.b Droites et plans de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont :

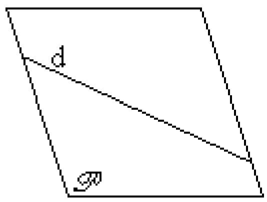
• soit **sécants**



d et P ont un point d'intersection A.

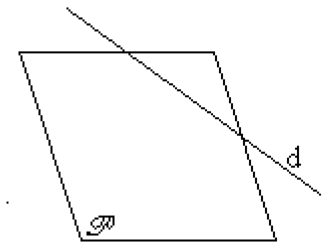
On note : $d \cap P = \{A\}$

• soit **parallèles**



d est contenue dans $\mathcal{P}$.

On note : $d \subset \mathcal{P}$



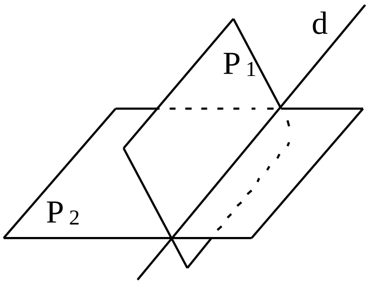
d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.

On note : $d \parallel \mathcal{P}$

1.1.c Plans de l’espace

Deux plans sont :

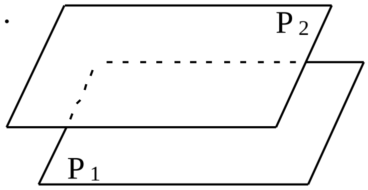
• soit **sécants**



P_1 et P_2 ont une droite d’intersection d.

On note : $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 = \mathrm{d}$

• soit **parallèles**



P_1 et P_2 sont strictement parallèles.

On note : $\mathrm{P}_1 \parallel \mathrm{P}_2$

P_1 et P_2 sont confondus.

On note : $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$

1.2 Déterminer l’intersection de deux plans

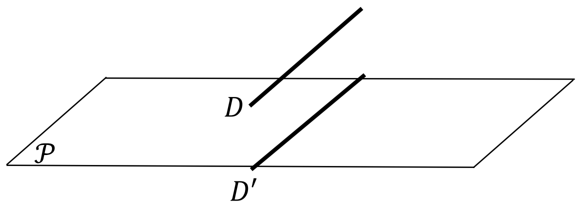
<u>Méthode :</u> Pour trouver l’intersection de deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, **il suffit** de trouver deux points A et B distincts, communs aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. L’intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite (AB).

2 Parallélisme dans l’espace

2.1 Parallélisme d’une droite avec un plan

<u>Théorème 1 :</u> Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ d’un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \\ \mathcal{D}' \subset \mathcal{P} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$$

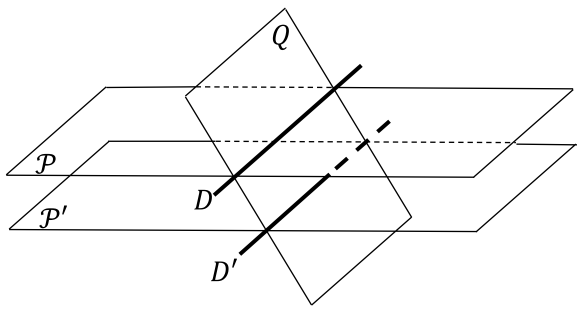


2.2 Parallélisme de deux droites

<u>Théorème 2:</u>

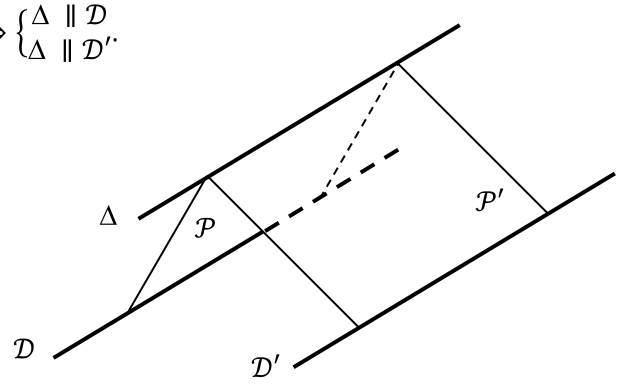
Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe $\mathcal{P}$ coupe aussi $\mathcal{P}'$ et les droites d’intersection sont parallèles.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \\ Q \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Q \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}' \\ \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \end{matrix}\right.$$



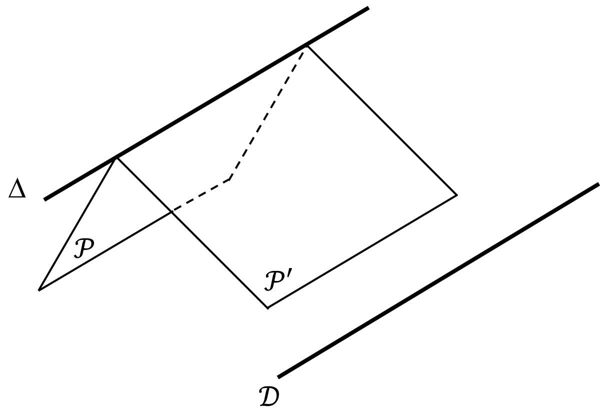
<u>Théorème 3 (« Théorème du toit » :</u> $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles. $\mathcal{P}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$, et $\mathcal{P}'$ un plan contenant $\mathcal{D}'$. Si, en outre, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}' \\ \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \parallel \mathcal{D} \\ \Delta \parallel \mathcal{D}' \end{cases}.$$



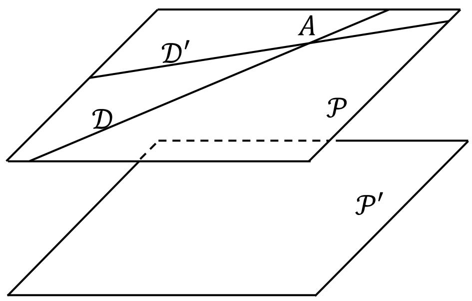
<u>Corollaire :</u> Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \\ \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}' \\ \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \parallel \mathcal{D}$$



2.3 Parallélisme de deux plans

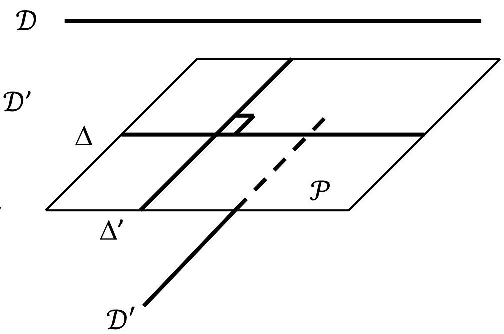
<u>Théorème 3 :</u> Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes et si ces droites sont toutes les deux parallèles à un plan $\mathcal{P}'$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.



$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{D} \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{D}' \subset \mathcal{P} \\ \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{A\} \\ \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}' \\ \mathcal{D}' \parallel \mathcal{P}' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$$

3 Orthogonalité dans l'espace[1]

3.1 Orthogonalité de deux droites de l'espace

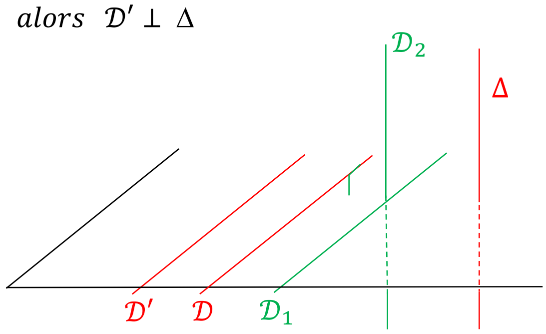


<u>Définition :</u> On dit que deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **orthogonales** s'il existe une droite Δ parallèle à $\mathcal{D}$ et une droite Δ' parallèle à $\mathcal{D}'$ qui sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

<u>Notation :</u> Lorsqu'une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à une droite $\mathcal{D}'$ ou un plan $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$.

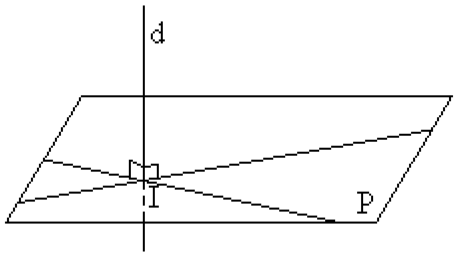
<u>Propriété :</u> Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$Si \quad \mathcal{D}' \parallel \mathcal{D} \quad et \quad \mathcal{D} \perp \Delta \quad alors \quad \mathcal{D}' \perp \Delta$$



3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

<u>Définition :</u> Une droite $\mathcal{D}$ est **perpendiculaire** à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à deux droites <u>sécantes</u> du plan $\mathcal{P}$.



<u>Théorème 1:</u> Si une droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ alors elle est <u>orthogonale à toutes les droites</u> de ce plan.

(démonstration : activité 2 p. 232)

<u>Propriétés (admises) :</u>

1) Il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ donné.
2) Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par un point A et perpendiculaire à une droite $\mathcal{D}$ donnée.
3) Si deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, alors tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}'$.
4) Si deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires à un même plan $\mathcal{P}$, alors elles sont parallèles.
5) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors toute droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}'$.

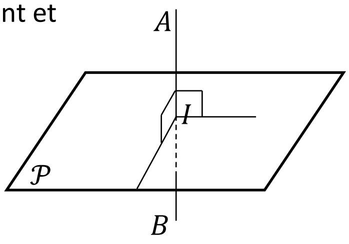
---

[1] On dit que deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.
Remarque : deux droites perpendiculaires sont sécantes, donc coplanaires.
On dit que deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.
Remarque : deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Théorème 2: Pour qu'une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ soient perpendiculaires, il suffit que $\mathcal{D}$ soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

3.3 Plan médiateur d'un segment

Définition :
Le plan médiateur $\mathcal{P}$ d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I du segment et perpendiculaire à la droite (AB).



Propriété (admise) :
Le plan médiateur $\mathcal{P}$ de $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B.

4 Géométrie vectorielle

4.1 Notion de vecteur de l'espace

4.1.a Définitions et règles de calculs

La notion de vecteur, vue en géométrie plane, se généralise à l'espace.
Par analogie, avec la définition dans le plan, on associe à deux points distincts A et B de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par sa direction (celle de la droite (AB)) , son sens (celui de A vers B) et sa longueur (ou norme : la distance AB, on note : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$).
Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est tel que : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$…
Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Théorème admis : A , B, C et D sont quatre points de l'espace.
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme
3) Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu

Les règles de calculs, y compris la relation de Chasles, sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

4.1.b Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. (Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur).

Théorèmes:

1) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Théorèmes: A et B sont deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, t étant un réel quelconque.

A et B sont deux points distincts de l'espace. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, avec t un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

4.2 Vecteurs coplanaires

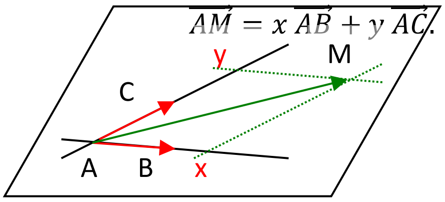
4.2.a Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

Théorème 1 : soient A, B et C trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe des réels x et y vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}.$$

Illustration :



- Soient A, B et C trois points non alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC). Donc si M est dans ce plan, il existe un couple $(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.
- **Réciproquement**, nous allons prouver que tout point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ est un point du plan (ABC). Puisque $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC), il existe dans ce plan un point N de coordonnées $(x\,;y)$tel que $\overrightarrow{AN} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ et $M = N$. M est donc bien dans le plan (ABC).

Définition : On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Un plan est déterminé par un point et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. On note $\mathcal{P}(A\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

4.2.b Vecteurs coplanaires

Définition : Dire que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que si on choisit un point O quelconque, O et les points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ sont dans un même plan.

Remarques :

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Théorème 2 : $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Dire que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b et tels que l'on peut écrire : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

<u>Démonstration :</u> Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ils sont des vecteurs directeurs du plan (OAB). Par définition, « $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires » signifie que C appartient au plan (OAB). D'après le théorème précédent, cette appartenance équivaut à « il existe deux réels a et b et tels que $\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$ » soit : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

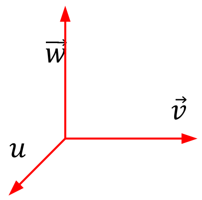
<u>Conséquences :</u>

- Dire que quatre points A, B, C, D sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.
- Dire qu'une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ équivaut à dire que un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

<u>Corollaire :</u> Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque :

Il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

4.2.c Vecteurs non coplanaires



Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires lorsque :

L'égalité : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique : $a = b = c = 0$.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Réponse :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

équivaut successivement à :

$$\begin{cases} -2a + 3b - c = 0 \\ 4a + 3b = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 + \frac{1}{2}L_1 \end{array} \begin{cases} -2a + 3b - c = 0 \\ 4a + 3b + 2(-2a + 3b - c) = 0 \\ a + 2b + c + \frac{1}{2}(-2a + 3b - c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + 3b - c = 0 \\ 9b - 2c = 0 \\ \frac{7}{2}b + \frac{1}{2}c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 9L_3 - \frac{7}{2}L_2 \end{array} \begin{cases} -2a + 3b - c = 0 \\ 9b - 2c = 0 \\ 9\left(\frac{7}{2}b + \frac{1}{2}c\right) - \frac{7}{2}(9b - 2c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+3b-c=0 \\ 9b-2c=0 \\ \dfrac{23}{2}c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+3b-c=0 \\ 9b-2c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+3b-0=0 \\ 9b-2\times 0=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u>

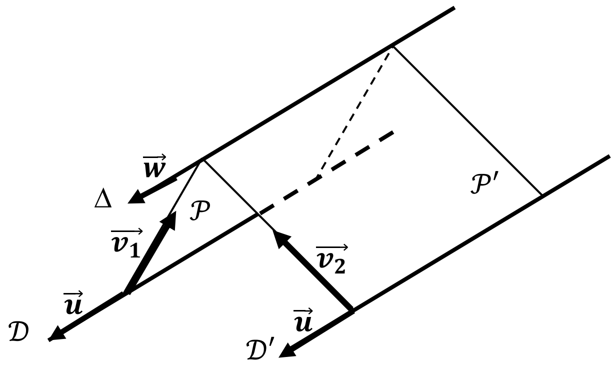
$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow (a;b;c)=(0;0;0)$$

ce qui équivaut à : les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ne sont pas coplanaires[2].

4.2.d Application : une autre démonstration du théorème du toit

<u>Enoncé :</u>

Lorsque deux plans sécants passent par deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces deux droites.



<u>Démonstration :</u>

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$
Notons $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.

Notons $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{v_1})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$
Notons $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{v_2})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}'$.

La droite Δ est contenue dans $\mathcal{P}$ donc les vecteurs $\vec{u},\overrightarrow{v_1},\vec{w}$ sont coplanaires.
Donc il existe un couple de réels $(x_1\,;y_1)$ tel que $\vec{w}=x_1\vec{u}+y_1\overrightarrow{v_1}$ (1).

De même Δ est contenue dans $\mathcal{P}'$ donc les vecteurs $\vec{u},\overrightarrow{v_2},\vec{w}$ sont coplanaires.
Donc il existe un couple de réels $(x_2\,;y_2)$ tel que $\vec{w}=x_2\vec{u}+y_2\overrightarrow{v_2}$ (2).

Les membres de droite des relations (1) et (2) sont égaux : $x_1\vec{u}+y_1\overrightarrow{v_1}=x_2\vec{u}+y_2\overrightarrow{v_2}$

$$(x_1-x_2)\vec{u}+y_1\overrightarrow{v_1}-y_2\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$$

Par hypothèse, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ **sont sécants** donc les vecteurs $\boldsymbol{\vec{u}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{v_1}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_2}}$ **ne sont pas coplanaires**.

$$(x_1-x_2)\vec{u}+y_1\overrightarrow{v_1}-y_2\overrightarrow{v_2}=\vec{0} \Rightarrow \big((x_1-x_2);y_1;-y_2\big)=(0;0;0)$$

[2] On peut dire aussi que les trois vecteurs sont **linéairement indépendants**.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = k, \quad k \in \mathbb{R} \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Donc les relations (1) et (2) s'écrivent $\vec{w} = k\vec{u}$.

<u>Conclusion :</u> Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

4.3 Repérage dans l'espace

4.3.a Repère de l'espace (orthogonaux ou quelconques)

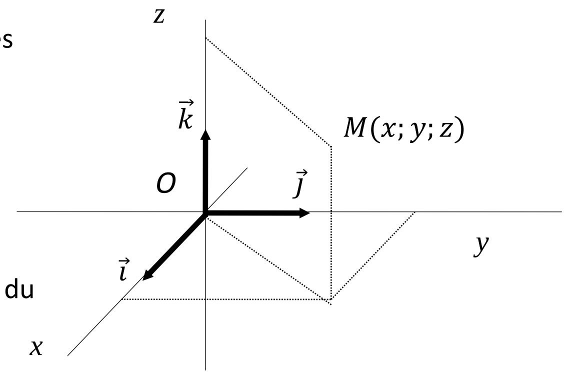
<u>Définitions :</u>

Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace. Alors

- $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace.
- $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
- Si $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, le repère est dit orthonormé lorsque les droites $(OI), (OJ)$ et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et $OI = OJ = OK = 1$.

4.3.b Coordonnées d'un point. Coordonnées d'un vecteur.

<u>Théorème :</u> $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.



<u>Démonstration :</u>

1. Démontrons l'existence du triplet $(x\,;y\,;z)$.

$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ étant non coplanaires, le plan $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et la droite $\Delta(M\,;\, \vec{k})$ ne sont pas parallèles. Notons M' le point d'intersection du plan $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de la droite Δ.

M' est un point du plan $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; il existe donc deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe donc z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$.
Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

2. Démontrons l'unicité du triplet $(x\,;y\,;z)$.

Si $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$, alors $(x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Ce qui conduit, puisque $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires à $x = x', y = y'$ et $z = z'$.

<u>Définitions :</u>

- $(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote de M dans ce repère.

- $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$ est un repère de l'espace. Au vecteur $\vec{u}$ associons M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. Par définition, les coordonnées de $\vec{u}$ sont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M. Ainsi, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique : $\vec{u}=\ x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+\ z\vec{k}$.

4.3.c Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

<u>**Théorème :**</u> $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur $\vec{V}$, il existe un triplet unique de nombres $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{V}=\ x\vec{u}+\ y\vec{v}+z\vec{w}$.

<u>**Définition :**</u> $(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

4.3.d Calculs sur les coordonnées (propriétés admises)

- Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$:
  - si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$, alors :
    - $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x', y=y'$ et $z=z'$;
    - pour tout réel k, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\,;ky\,;kz)$;
    - le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.
  - si A et B ont pour coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors
    - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A)$;
    - le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2};\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$:
  - $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
  - $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\ \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

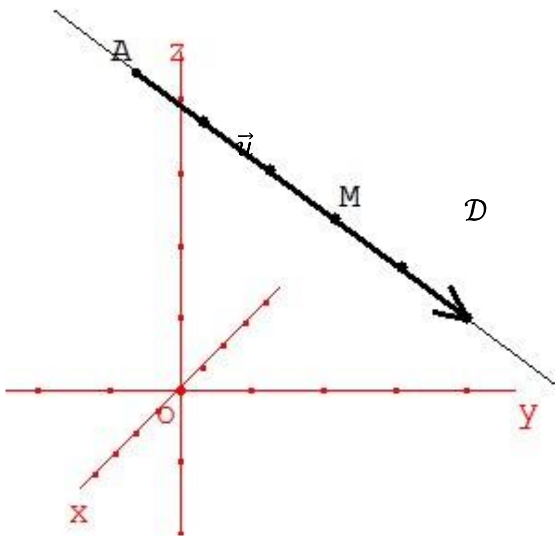
4.4 Systèmes d'équations paramétriques

4.4.a Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

Un point M de coordonnées (x,y,z) appartient à $\mathcal{D}$ équivaut successivement à :



- ∗ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
- ∗ Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k.\vec{u}$
- ∗ Il existe un réel k tel que $\begin{cases}x-x_A=ka\\y-y_A=kb\\z-z_A=kc\end{cases}$
- ∗ Il existe un réel k tel que $\boxed{\begin{cases}x=x_A+ka\\y=y_A+kb\\z=z_A+kc\end{cases}}$ (S)

Ce système (S) est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$, k est le paramètre du point M.

Exemple : La droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$, passant par le point $A(2;0;5)$ admet comme système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2-2k \\ y = 4k \\ z = 5-4k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

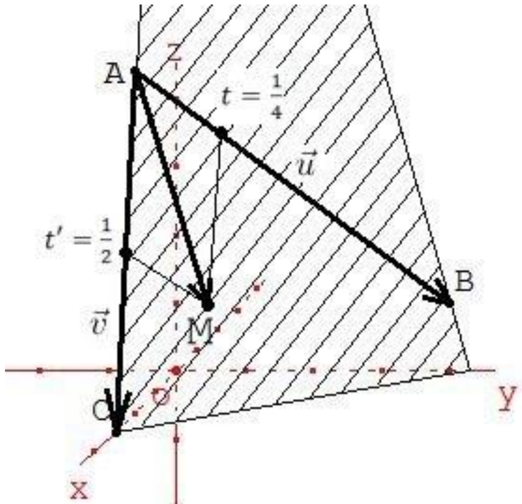
$k = \frac{3}{5}$ correspond au point $M(0{,}8; 2{,}4; 2{,}6)$ ou $M\left(\frac{4}{5} ; \frac{12}{5} ; \frac{13}{5}\right)$.

4.4.b Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$.

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ équivaut successivement à :



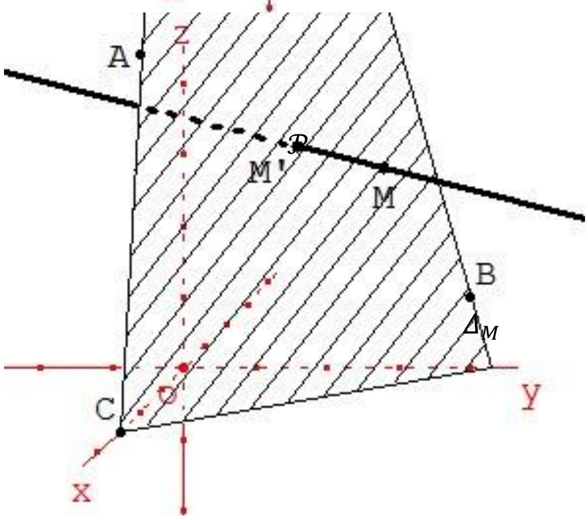
* Il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$
* Il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases}$
* Il existe deux réels t et t' tels que $\boxed{\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}}$ (S)

Ce système (S) est une **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$,le couple $(t ; t')$ est le couple de paramètres du point M.

5 Produit scalaire

5.1 Projections orthogonales

5.1.a Projection orthogonale sur un plan



$\mathcal{P}$ est un plan , M est un point de l'espace.

La droite Δ_M passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{P}$ en M'.

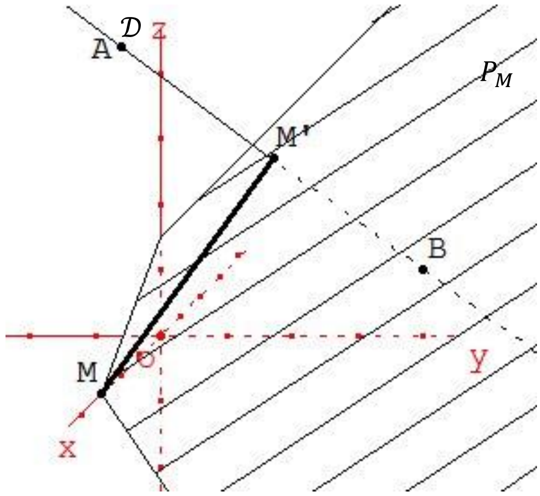
M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

5.1.b Projection orthogonale sur une droite

$\mathcal{D}$ est une droite, M est un point de l'espace.

Le plan P_M passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{D}$ en M'.

M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.



5.2 Produit scalaire dans l'espace

5.2.a Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Soit A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C (unique si A, B et C ne sont pas alignés).

$\vec{u}.\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u};\vec{v}) \qquad \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(0) = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = AB^2}$$

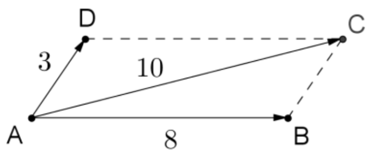
Remarque :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

Exemple :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 3^2) = \frac{27}{2}$$



5.2.b Expression analytique

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

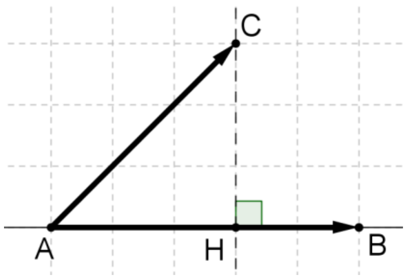
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - (x^2+y^2+z^2) - (x'^2+y'^2+z'^2)]$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[2xx' + 2yy' + 2zz']$$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

5.2.c Propriétés (admises, sauf la dernière)

- Les propriétés mettant en jeu 2 vecteurs dans le plan sont encore vraies dans l'espace.
  - En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, avec H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)



- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel k :
  - $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
  - $\vec{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
  - $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Démonstration :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace

On a $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\\z'+z''\end{pmatrix}$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') + z(z'+z'')$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = xx' + xx'' + yy' + yy'' + zz' + zz''$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = xx' + yy' + zz' + xx'' + yy'' + zz''$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

5.3 Orthogonalité dans l'espace

5.3.a Vecteurs orthogonaux

Définition : Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de l'espace sont orthogonaux signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Le vecteur nul est, par convention, orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Théorème : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

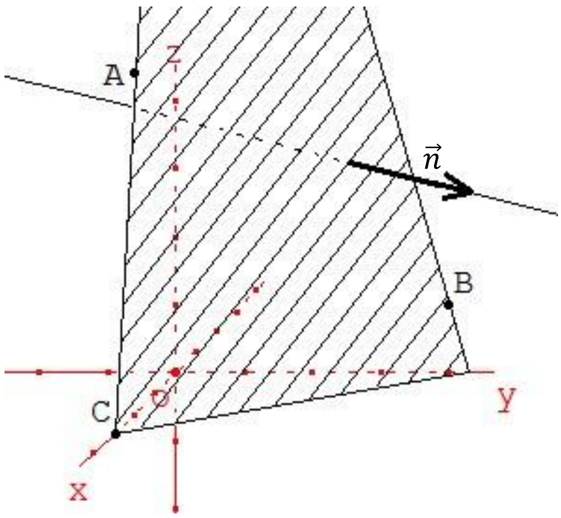
Démonstration : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ d'après la définition.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, considérons les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont orthogonales ce qui équivaut à $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ donc à $\cos \widehat{BAC} = 0$ et à $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

5.3.b Orthogonalité de deux droites

Propriété (admise) : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, alors ces droites sont orthogonales si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

5.3.c Vecteur normal à un plan



Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Remarque : Tous les vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires entre eux.

Propriété (admise) : $\mathcal{P}$ est un plan , A est un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Théorème : Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.
La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{P}$.

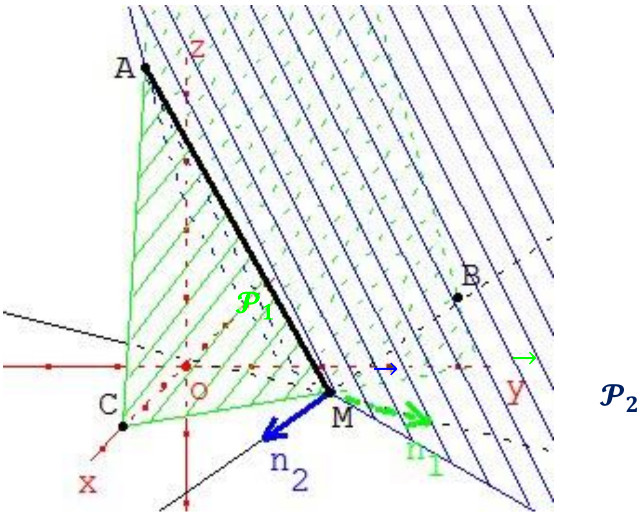
Démonstration (exigible au baccalauréat) : Si la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$; elle est en particulier orthogonale aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{P}$.

- Si $\vec{u}, \overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs, respectivement des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, $\vec{u}.\overrightarrow{v_1} = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{v_2} = 0$ puisque $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
- Soit Δ une droite du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
- Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ étant sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan $\mathcal{P}$, il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}$.
- On a alors $\vec{u}.\vec{w} = x\,\vec{u}.\overrightarrow{v_1} + y\,\vec{u}.\overrightarrow{v_2} = 0$.
- On en déduit donc que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à la droite Δ.

Remarque : Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de ce plan.

5.3.d Plans perpendiculaires



$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des plans, $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Définition : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.

Propriété : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires équivaut à $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.

Remarque : Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un n'est pas perpendiculaire à l'autre et toute droite de l'un n'est pas perpendiculaire à toute droite de l'autre

5.4 Application du produit scalaire : équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace

(1) Soit d un réel. Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

(2) **Réciproquement**, a, b , c et d étant 4 réels donnés avec$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble (E) des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration (exigible au baccalauréat) :

(1) $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

équivaut successivement à :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

$ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

(2) Soit l'ensemble (E) des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ et soit le point $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ (en supposant que $a \neq 0$). Comme $a\left(-\frac{d}{a}\right) + b \times 0 + c \times 0 + d = 0$, on déduit que $A \in (E)$.

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + \dfrac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Notons $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \left(x + \frac{d}{a}\right) \times a + y \times b + z \times c$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = x \times a + y \times b + z \times c + d$

$ax + by + cz + d = 0$ donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. D'où (E) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

5.5 Intersection de droites et de plans

5.5.a Intersection d'une droite et d'un plan

<u>Propriétés (admises) :</u> Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :
  - Si A appartient à $\mathcal{P}$, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
  - Si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

<u>Remarque :</u> On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants si et seulement si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$ n'est pas nul.

5.5.b Intersection de deux plans

<u>Propriétés (admises) :</u> Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants : leur intersection est une droite.

<u>Propriétés :</u> On se place dans un repère orthonormé.

- Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants si et seulement si $(a\,; b\,; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'\,; b'\,; c')$.
- Lorsque a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels, l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,; y\,; z)$ vérifient $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite.

<u>Démonstrations :</u>

- Les vecteurs $\vec{n}(a\,; b\,; c)$ et $\overrightarrow{n'}(a'\,; b'\,; c')$ sont des vecteurs normaux respectifs des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Ces plans sont donc parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires ce qui équivaut à dire que $(a\,; b\,; c)$ est proportionnel à $(a'\,; b'\,; c')$.
- Il s'agit de la droite d'intersection des plans d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.