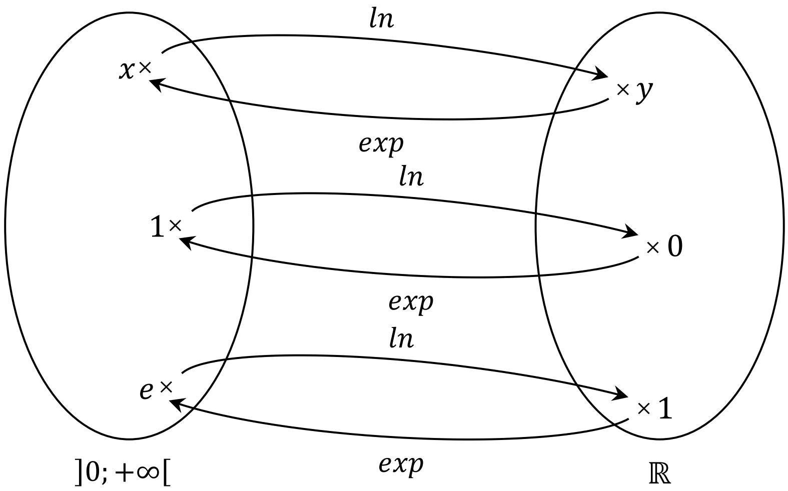
CHAPITRE 7 : Fonction logarithme népérien

CHAPITRE 7 : Fonction logarithme népérien

1 Définition de la fonction logarithme népérien[1] ln

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui, à tout réel x strictement positif, associe le réel $y = \ln(x)$ tel que $e^y = x$.

On dit que les fonctions **$\ln$ et exp sont des fonctions réciproques** l'une de l'autre.



Remarques sur le langage :

On dit que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.

ln est elle-même une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. C'est la bijection réciproque de exp

Conséquences :

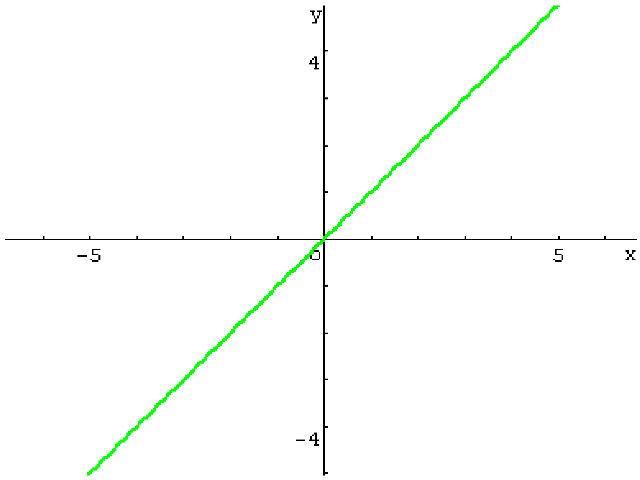
(1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y = \ln(x) \iff x = e^y$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

(4) $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Remarque : Leurs courbes représentatives, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



[1] **Neper** (John), *baron* **de Merchiston,** mathématicien écossais (Merchiston, près d'Édimbourg, 1550 - 1617). On lui doit l'invention des logarithmes (1614).

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Pour tous réels a et b strictement positifs,

(1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

(5) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

<u>Démonstrations :</u>

(1) Notons $A = \ln(ab)$ Alors $e^A = e^{ln(ab)} = ab$

Notons $B = \ln(a) + \ln(b)$ Alors $e^B = e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$

$e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$ donc $\mathbf{ln(ab) = ln(a) + ln(b)}$.

(2) D'après la propriété (1) $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

Et comme $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$

on déduit que $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. D'où $\mathbf{ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)}$

(3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$.

D'après les propriétés (1) et (2) $\ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ D'où $\mathbf{ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)}$

(4) <u>Pour $n \geq 0$</u>, faisons une démonstration par récurrence :

- Initialisation : si $n = 0$ on a : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$.
  Donc $\ln(a^0) = 0 \times \ln(a)$
- Hérédité : Supposons qu'au rang k : $\ln(a^k) = k \times \ln(a)$ (hypothèse de récurence)

$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a)$. D'après la propriété (1) on a $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k) + \ln(a)$.

Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\ln(a^{k+1}) = k \times \ln(a) + \ln(a)$.

D'où $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \times \ln(a)$

- Conclusion : **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$**

On admet finalement, **pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$**

(5) pour tout réel > 0 , $(\sqrt{a})^2 = a$ donc $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$

De plus, $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2 \times \ln(\sqrt{a})$. Donc $\ln(a) = 2 \times \ln(\sqrt{a})$. D'où $\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})}$

3 Résolution d'équations et d'inéquations

3.1 Equations

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ pour tous réels a et b strictement positifs

<u>Démonstration :</u>

On sait que pour tous réels A et B, $A = B \Leftrightarrow e^A = e^B$. Donc :
$\ln(a) = \ln(b)$ équivaut successivement à :
$e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)}$
$a = b$

<u>Exemple :</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x) = 1 + \ln(3)$

- Condition d'existence : $x > 0$
- Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $\ln(x) = 1 + \ln(3)$ équivaut successivement à :
  $\ln(x) = \ln(e) + \ln(3)$
  $\ln(x) = \ln(3e)$
  $x = 3e$ d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S = \{3e\}}$

3.2 Inéquations

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ pour tous réels a et b strictement positifs

<u>Démonstration :</u>

On sait que pour tous réels A et B, $A < B \Leftrightarrow e^A < e^B$. Donc :
$\ln(a) < \ln(b)$ équivaut successivement à :
$e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$
$a < b$

<u>Exemple :</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3x + 1) < 2$

- Condition d'existence : $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
- Pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln(3x + 1) < 2$ équivaut successivement à :
  $\ln(3x + 1) < \ln(e^2)$
  $3x + 1 < e^2$
  $x < \frac{e^2-1}{3}$ $\frac{e^2-1}{3} \approx 2{,}130$ d'où l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S = \left]-\frac{1}{3} ; \frac{e^2-1}{3}\right[}$

4 Etude de la fonction logarithme népérien

4.1 Continuité et dérivabilité

- La fonction ln est **continue** sur $]0;+\infty[$
- La fonction ln est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $\mathbf{(ln)'(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

4.2 Variations

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

<u>Démonstration :</u>

Pour tout > 0 , $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ donc $(\ln)'(x) > 0$

Conclusion : la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4.3 Limites en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

et

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

<u>Démonstration de :</u> $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to+\infty} \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = +\infty$

Soit A un réel positif. $x > e^A \Leftrightarrow \ln(x) > A$

Donc pour x assez grand ($x > e^A$) , l'intervalle] A ; +∞[contient toutes les valeurs de $\ln(x)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

<u>Démonstration de :</u> $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = -\infty$

Soit un réel $x > 0$. Faisons un changement de variable. On pose $X = \frac{1}{x}$.

donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln(X))$

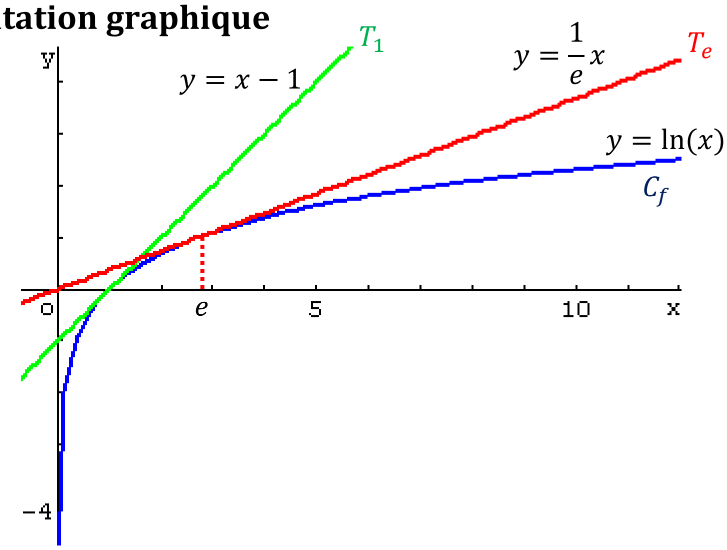
D'après le résultat précédemment démontré $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln(X)) = -\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = -\infty$

La courbe représentative de la fonction ln admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4.4 Tableau de variation et représentation graphique

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$	$\|\|$	$+$
variation de ln	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



La tangente à la courbe C_f d'équation $y = \ln(x)$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = x - 1$

<u>Démonstration</u>

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$

$y = \frac{1}{1} \times (x - 1) + \ln(1)$

Or $\ln(1) = 0$, donc la tangente a pour équation $\boldsymbol{y = (x - 1)}$

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse e est la droite d'équation : $y = \frac{1}{e}x$

<u>Démonstration</u>

La tangente au point d'abscisse e a pour équation $y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$

$y = \frac{1}{e} \times (x - e) + \ln(e)$

Or $\ln(e) = 1$, donc la tangente a pour équation $\boldsymbol{y = \frac{1}{e} \times x}$ Elle passe donc par l'origine du repère.

4.5 Autre limite à connaitre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Calcul de :

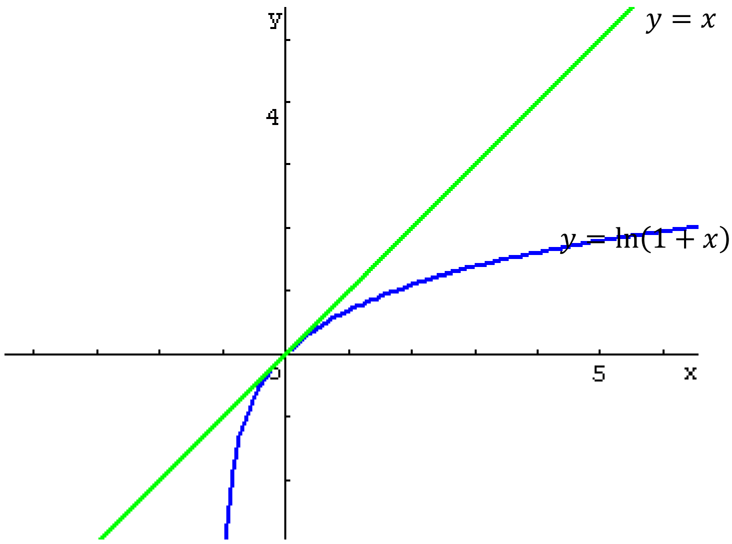
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Pour tout réel non nul $x > -1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$$

Or, la fonction ln est dérivable en $a = 1$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = 1$$



$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

4.6 Autres limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} x.\ln(x)$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

<u>Démonstration :</u>

On fait le changement de variable $t = \ln(x)$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t}$$

Or, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ D'où, par passage à l'inverse : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{e^t} = 0}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(x.\ln(x)\right) = 0}$$

Démonstration : On fait un changement de variable $t = \frac{1}{x}$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}(x.\ln(x)) = \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t}.\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(x.\ln(x)) = \lim_{t\to +\infty}\left(\frac{-\ln(t)}{t}\right)$$

D'après le résultat précédemment démontré : $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\ln(t)}{t} = 0$ d'où $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\ln(x)\right) = 0}$

5 Fonction $\ln(u)$

Soit u une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est **dérivable sur I** et $\quad \boldsymbol{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$

6 Fonction logarithme décimal log

6.1 Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Remarques :

$\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

La fonction log a le même signe, le même sens de variation et les mêmes limites que la fonction ln

6.2 Propriétés

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$ $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

Démonstration :

$$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)} = \frac{\ln(a)}{\ln(10)} + \frac{\ln(b)}{\ln(10)} = \boldsymbol{\log(a) + \log(b)}$$

Conséquences :

Les propriétés algébriques de la fonction ln sont aussi vérifiées par la fonction log. Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs :

(1) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

(2) $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

(3) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(a^n) = n \times \log(a)$. En particulier, $\log(10^n) = n \times \log(10) = n$.

(5) $\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)$