CHAPITRE 8 : Calcul intégral

[1 Intégrale d’une fonction positive 2](#_Toc460574833)

[1.1 Définitions 2](#_Toc460574834)

[1.2 Encadrement de l’intégrale d’une fonction positive 4](#_Toc460574835)

[2 Primitives d’une fonction continue 6](#_Toc460574836)

[2.1 Théorème fondamental 6](#_Toc460574837)

[2.2 Primitives d’une fonction sur un intervalle 8](#_Toc460574838)

[3 Recherche des primitives 10](#_Toc460574839)

[3.1 Primitives des fonctions usuelles 10](#_Toc460574840)

[3.2 Formes remarquables 12](#_Toc460574841)

[4 Intégrale d’une fonction continue 13](#_Toc460574842)

[4.1 Calcul de l’intégrale d’une fonction positive sur [*a* ; *b*] 13](#_Toc460574843)

[4.2 Généralisation de la notion d’intégrale 13](#_Toc460574844)

[4.2.1 Définition 13](#_Toc460574845)

[4.2.2 Propriétés 14](#_Toc460574846)

[5 Des applications du calcul intégral 15](#_Toc460574847)

[5.1 Calcul d’aires 15](#_Toc460574848)

[5.2 Valeur moyenne d’une fonction 17](#_Toc460574849)

CHAPITRE 8 : Calcul intégral

# Intégrale d’une fonction positive

## Définitions

***Définition 1***

Dans un repère orthogonal on appelle **unité d’aire** l’aire du rectangle de côtés et .

***Exemples***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.1a.png | 1.1b.png | 1.1c.png |
| Courbe d’équation dans un repère avec comme échelle :* 2 cm pour 1 unité sur l’axe
* 2 cm pour 1 unité sur l’axe

**L’unité d’aire est de**  | Courbe d’équation dans un repère avec comme échelle :* 2 cm pour 1 unité sur l’axe
* 1 cm pour 1 unité sur l’axe

**L’unité d’aire est de**  | Courbe d’équation dans un repère avec comme échelle :* 1 cm pour 1 unité sur l’axe
* 1 cm pour 1 unité sur l’axe

**L’unité d’aire est de**  |

***Définition 2***

Soit une fonction continue et positive sur un intervalle et sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On appelle **intégrale de entre et** , l’aire, exprimée en unité d’aire, de la surface délimitée par la courbe , l’axe des abscisses et les droites d’équations et .

Cette aire est appelée « **l’aire sous la courbe de**  ».

Cette intégrale se note :

et se lit « intégrale de à de  ».

 est la **borne inférieure** et est **la borne supérieure** de l’intégrale.

***Exemples***

|  |  |
| --- | --- |
| 1t.png | 1u.png |
|  |  |

***Remarques***

* C’est l'opérateur mathématique qui est associé à l'intégration. Ce symbole est un ancien ***S*** long : Leibniz[[1]](#footnote-1) s'est servi de l'initiale du mot latin *summa*, « somme », lequel était souvent écrit *ſumma*. L’aire peut être considérée comme limite d’une **somme** d’aires de rectangles.

La variable peut être remplacée par n’importe quelle lettre (variable muette). Par exemple :

 est l’aire d’un rectangle de hauteur et de largeur , infiniment proche de zéro.

* L’intégrale donne l’aire sous la courbe **en nombre d’unité d’aire**. Elle est indépendante de l’échelle graphique choisie. Si on veut l’aire sous la courbe en cm² par exemple, il faut multiplier l’intégrale par la valeur en cm² de l’unité d’aire.

***Exemples***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.1d.png | 1.1e.png | 1.1f.png |
|  |  |  |

## Encadrement de l’intégrale d’une fonction positive

Pour déterminer une approximation de l’intégrale d’une **fonction continue monotone et positive** sur , on peut partager l’intervalle sous-intervalles de même amplitude :

***Exemple***

|  |
| --- |
| 1g.png |

* Ici l’intervalle est partagé en sous-intervalles d’amplitude .

Les sous-intervalles sont du type avec entier variant entre et .

* Le premier sous-intervalle correspond à .

C’est le sous-intervalle

Le dernier sous-intervalle correspond à .

C’est le sous-intervalle

* Pour chacun des sous intervalles, on construit un rectangle inférieur situé en-dessous de la courbe et un rectangle supérieur situé au-dessus de la courbe.

Sur la figure précédente (cas d’une fonction décroissante sur ), le rectangle inférieur correspondant au sous-intervalle a pour hauteur et a pour aire .

Toujours dans le cas d’une fonction décroissante sur , le rectangle supérieur correspondant au sous-intervalle a pour hauteur et a pour aire .

* L’aire de la surface située sous la courbe sur est encadrée par la somme des aires des rectangles inférieurs et la somme des aires des rectangles supérieurs.

Dans le cas d’une fonction croissante sur , les rectangles d’aires sont les rectangles inférieurs et les rectangles d’aires sont les rectangles supérieurs.

Lorsque est continue, monotone (croissante ou décroissante) et positive sur , l’intégrale est encadrée par :

|  |  |
| --- | --- |
| Si est monotone **croissante** alors : | Si est monotone **décroissante** alors : |
|  |  |

On écrit un algorithme :

* Qui demande à l’utilisateur de saisir les bornes et de l’intervalle d’intégration ainsi que le nombre de sous-intervalles.
* Qui fournit les sommes et

La première somme est inférieure à la deuxième lorsque la fonction est croissante sur .

Au contraire, elle est supérieure lorsque la fonction est décroissante sur .

Dans tous les cas, on obtient un encadrement de l’intégrale .

***Déclaration des variables***

, , , , , réels

, entiers

Début algorithme :

Saisir ,,

 prend la valeur (-)/

 prend la valeur

 prend la valeur 0 ( sert à cumuler les aires )

 prend la valeur 0 ( sert à cumuler les aires )

Pour variant de à

 prend la valeur ( est l’expression de la fonction )

 prend la valeur

 prend la valeur

Fin Pour

Afficher

Afficher

Fin Algorithme

L’encadrement de l’intégrale a une amplitude d’autant plus faible que le nombre de sous-intervalles est grand. Par exemple, pour la fonction inverse, décroissante sur , on obtient :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Amplitude =  | Amplitude =  | Amplitude =  |

|  |
| --- |
| 1h.png |
|  |
| 1i.png |

# Primitives d’une fonction continue

## Théorème fondamental

Si est une fonction continue et positive sur et un réel de alors la fonction définie sur par est **dérivable sur**  et **.**

***Démonstration***

* 1er cas :

Soit la fonction définie sur par où on suppose que est **strictement croissante** sur .



Soit et deux réels de avec .

Puisque est positive sur , alors est l’aire hachurée en vert, est l’aire hachurée en bleu et la différence est l’aire colorée en rouge.

On peut encadrer cette aire entre l’aire d’un rectangle inférieur et l’aire d’un rectangle supérieur.

Comme on a supposé que la fonction est croissante sur , on a l’encadrement :

* Pour donné dans on a :

Comme est continue en tout réel alors on a :

|  |  |
| --- | --- |
|  | en posant  |

Donc, d’après le théorème des gendarmes :

* 2ème cas :

Si on considère la fonction définie sur par où on suppose que est **strictement décroissante** sur on arrive au même résultat.

Enfin, si on considère que est négatif, on arrive aussi à :

Conclusion :

La fonction est dérivable sur et sa dérivée est .

## Primitives d’une fonction sur un intervalle

***Définition***

Soit une fonction continue sur un intervalle .

On appelle primitive de sur , toute fonction dérivable sur telle que

***Exemple***

Soit la fonction définie sur par

Une primitive de sur est la fonction définie sur par

***Théorème***

Toute fonction continue sur un intervalle admet des fonctions primitives sur cet intervalle.

***Démonstration***

Considérons une fonction définie sur un intervalle .

* 1er cas :

Si est continue et positive sur , on est dans le cas du théorème fondamental vu au § 2.1 :

La fonction définie sur par est **dérivable sur**  et **.**

Donc a bien au moins une primitive : c’est la fonction .

***Exemple***

La fonction définie sur par est continue et positive sur .

Donc a comme primitive la fonction définie sur par .



* 2ème cas : Si est continue et de signe quelconque sur , on définit la fonction par où est le minimum atteint par sur l’intervalle .

***Exemple***

La fonction définie sur par est continue sur et a pour minimum .

Donc la fonction définie sur par est continue et positive sur .

Donc, d’après le théorème fondamental, a comme primitive la fonction définie sur par .

Soit la fonction définie sur par

 est une somme de fonctions dérivables sur donc est dérivable sur .

Or, Donc :

La fonction définie sur par est **dérivable sur**  et **.**

Donc a bien au moins une primitive : c’est la fonction .

Ce raisonnement peut être repris toute fonction continue sur en posant

Conclusion :

Toute fonction continue sur un intervalle admet des fonctions primitives sur cet intervalle.

***Remarque***

Toutes les fonctions continues ont des primitives, mais il n’est pas toujours possible de connaitre leur expression explicitement en fonction de . C’est le cas par exemple de la fonction définie par :

***Propriété 1***

Soit une fonction continue sur un intervalle . Si est une primitive de sur un intervalle , alors toutes les primitives de sont les fonctions définies sur par où .

***Exemple***

Soit la fonction définie sur par

Une primitive de sur est la fonction définie sur par .

Une autre primitive de sur est la fonction définie sur par .

Toutes les primitives de sur sont les fonctions , .

***Propriété 2***

Soit un réel de l’intervalle . Soit un réel. Il existe une unique primitive de telle que .

***Exemple***

Soit la fonction définie sur par Déterminer la primitive de telle que .

*Réponse :*

Toutes les primitives de sur sont les fonctions , .

 équivaut successivement à :

Donc la primitive de telle que est la fonction définie sur par

# Recherche des primitives

## Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Fonction**  | **Une primitive**  | **Intervalle(s) de validité** |
| Pour  |  |  |
| Pour  |  | Si  : Si  : ou  |
|  |  |  ou  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Pour  |  |  |
| Pour  |  |  |

***Exemples***

* Une primitive sur de la fonction définie par est la fonction définie par :
* Une primitive sur de la fonction définie par est la fonction définie par :
* Une primitive sur de la fonction définie par (c'est-à-dire ) est la fonction définie par :
* Une primitive sur de définie par est la fonction définie par :
* Une primitive sur de définie par est la fonction définie par :

## Formes remarquables

 et sont deux fonctions continues sur un intervalle . et sont des primitives de et sur

 est une fonction dérivable sur et .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Fonction**  | **Une primitive**  | **Conditions** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Pour  |  | Si  : pas de conditionSi  :  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Exemple 1***

Déterminer une primitive de la fonction définie sur l'intervalle

*Réponse :*  donc une primitive de cette fonction sur l'intervalle est définie par :

***Exemple 2***

Déterminer une primitive de la fonction définie sur par :

*Réponse :*

Pour pouvoir utiliser le théorème «  est une primitive de  », on cherche à écrire sous la forme d'une **somme :**

donc une primitive de sur est définie par :

# Intégrale d’une fonction continue

## Calcul de l’intégrale d’une fonction positive sur [*a* ; *b*]

***Propriété***

Soit une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle .

Si est une primitive de alors

***Démonstration***

* D’après le théorème fondamental vu au §2.1

Si est une fonction continue et positive sur et un réel de alors la fonction définie sur par est **une primitive de**

De plus, si est une primitive de alors il existe une constante réelle telle que

Donc

* En reprenant la définition de  :

Conclusion :

## Généralisation de la notion d’intégrale

### Définition

Soit une fonction **continue** et **de signe quelconque** sur un intervalle et et deux réels de .

On appelle intégrale de entre et le réel :

***Remarque***

Avec cette définition, l’intégrale n’est plus nécessairement positive comme c’est le cas dans la définition de l’intégrale d’une fonction positive.

***Interprétation de l’intégrale d’une fonction de signe quelconque***

Soit une fonction **continue** et de **signe quelconque** sur

est la somme des aires définies à partir des intervalles sur lesquels garde un signe constant. On additionne les aires quand est positive. On **soustrait** les aires quand est **négative**.

***Exemple*** :

### Propriétés

Soit et deux fonctions continues sur un intervalle .

Soir , , trois réels de et soit un réel quelconque.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. |  |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  | Linéarité pour la multiplication par un réel |
| 4. |  | Linéarité pour l’addition |
| 5. |  | Relation de Chasles |
| 6. | Si et si alors  |  | Positivité |
| 7. | Si , alors  |  | Comparaison |

# Des applications du calcul intégral

## Calcul d’aires

***Propriété 1***

Si est **continue** et **négative** sur , l’aire exprimée en unité d’aire de la surface plane délimitée par la courbe , l’axe des abscisses et les droites verticales d’équation et est égale à

***Exemple***



La fonction définie par est négative sur .

Donc l’aire , en unité d’aire, de la surface comprise entre la courbe , l’axe des abscisses et les droites d’équation et est égale à

Une primitive de est telle que

 unité d’aire. Si l’unité d’aire est 2 cm², alors cm².

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| On peut vérifier à la calculatrice que  |  | en tapant : |

 MATH 9 : foncIntégr(X²-4X,X,1,2)  puis  Frac

***Propriété 2***

Si et sont **continues** et telles que  sur , alors l’aire exprimée en unité d’aire de la surface comprise **entre les courbes et**  et les droites verticales d’équation et est égale à

***Exemple***



L’étude du signe de montre que sur l’intervalle ,

Donc l’aire , en unité d’aire (notée ), de la surface comprise entre les courbes et et les droites d’équation et est égale à

Une primitive de est telle que

## Valeur moyenne d’une fonction

Une application intéressante du calcul intégral est le calcul de la valeur moyenne d’une grandeur continue sur un intervalle.

***Définition***

Soit une fonction continue sur un intervalle .

La valeur moyenne de sur est le réel :

***Remarque***

Si la fonction est positive sur , la valeur moyenne  **est la hauteur du rectangle** de largeur **qui a la même aire** que l’aire sous la courbe :

***Exemple***



* La valeur moyenne de la fonction telle que sur est égale à
* Pour trouver une primitive de , on linéarise[[2]](#footnote-2)

On a , donc , d’où l’expression linéarisée :

1. **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ** (1646 – 1716) : Mathématicien, scientifique, juriste et philosophe allemand. [↑](#footnote-ref-1)
2. Une expression **linéaire** en $sin(x)$ et $cos⁡(x)$ est une expression du type $a×\sin(\left(kx\right))+b×\cos(\left(k^{'}x\right))+c$, c’est à dire sans produit de sinus ou de cosinus entre eux. Il est alors possible de trouver une primitive. [↑](#footnote-ref-2)