CHAPITRE 8 : Calcul intégral

CHAPITRE 8 : Calcul intégral

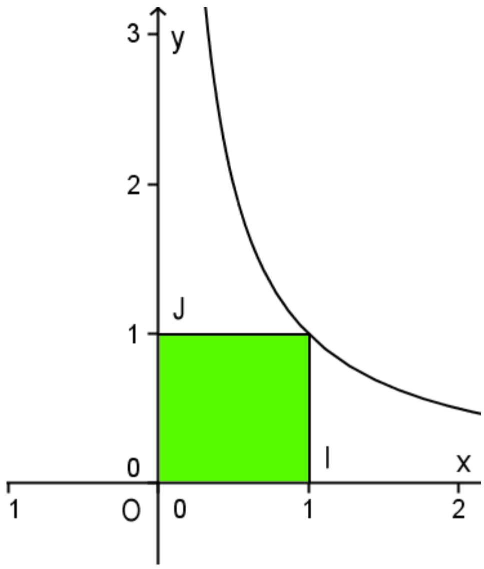
1 Intégrale d'une fonction positive

1.1 Définitions

Définition 1

Dans un repère orthogonal $(O\,;I,J)$ on appelle **unité d'aire** l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

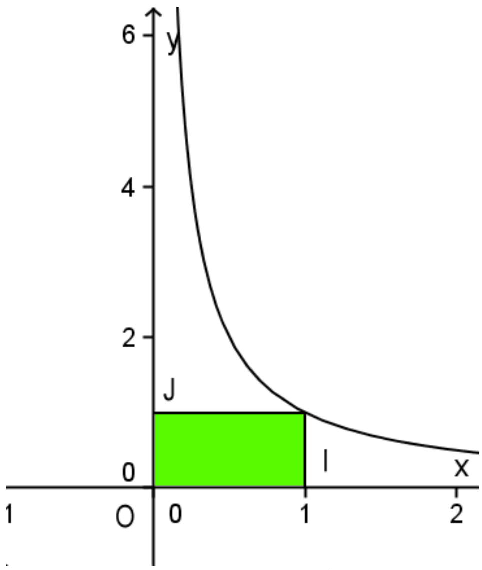
Exemples



Courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère $(O\,;I,J)$ avec comme échelle :

- 2 cm pour 1 unité sur l'axe (Ox)
- 2 cm pour 1 unité sur l'axe (Oy)

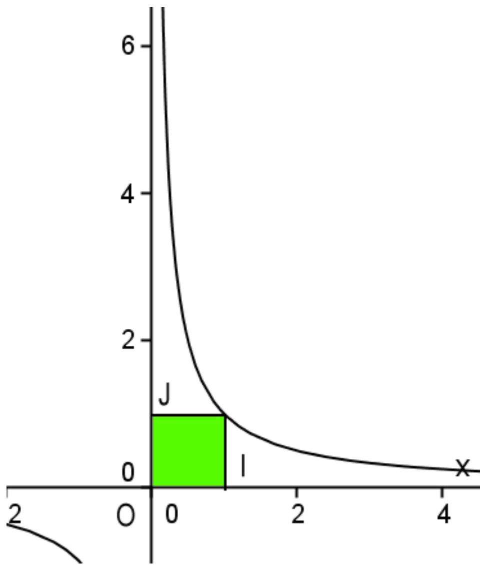
L'unité d'aire est de $2 \times 2 = \mathbf{4\ cm^2}$



Courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère $(O\,;I,J)$ avec comme échelle :

- 2 cm pour 1 unité sur l'axe (Ox)
- 1 cm pour 1 unité sur l'axe (Oy)

L'unité d'aire est de $2 \times 1 = \mathbf{2\ cm^2}$



Courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère $(O\,;I,J)$ avec comme échelle :

- 1 cm pour 1 unité sur l'axe (Ox)
- 1 cm pour 1 unité sur l'axe (Oy)

L'unité d'aire est de $1 \times 1 = \mathbf{1\ cm^2}$

Définition 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On appelle **intégrale de f entre a et b**, l'aire, exprimée en unité d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est appelée « **l'aire sous la courbe de f** ».

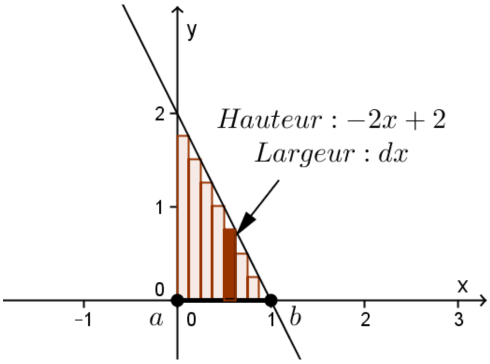
Cette intégrale se note :

$$\int_a^b f(x)dx$$

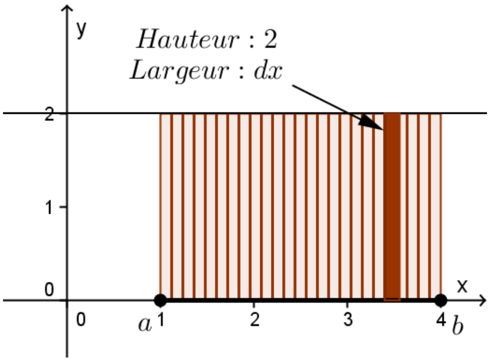
et se lit « intégrale de a à b de f ».

a est la **borne inférieure** et b est **la borne supérieure** de l'intégrale.

Exemples



$$\int_0^1 (-2x+2)\,dx = 1$$



$$\int_1^4 2dx = 3 \times 2 = 6$$

Remarques

- C'est l'opérateur mathématique ∫ qui est associé à l'intégration. Ce symbole est un ancien ***S*** long : Leibniz[1] s'est servi de l'initiale du mot latin *summa*, « somme », lequel était souvent écrit *ſumma*. L'aire peut être considérée comme limite d'une **somme** d'aires de rectangles.

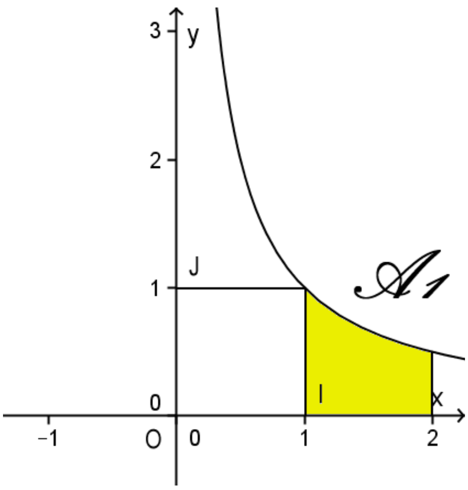
La variable x peut être remplacée par n'importe quelle lettre (variable muette). Par exemple :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(z)dz = \cdots$$

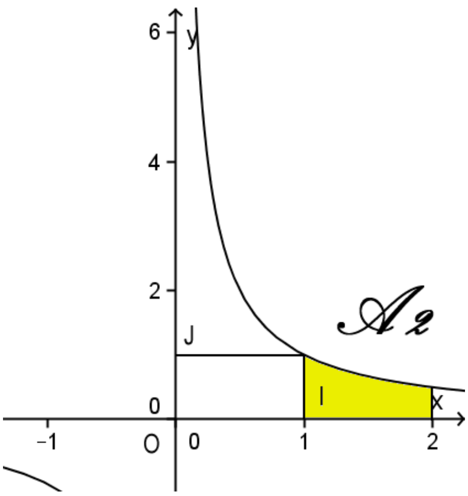
$f(x)dx$ est l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx, infiniment proche de zéro.

- L'intégrale donne l'aire sous la courbe **en nombre d'unité d'aire**. Elle est indépendante de l'échelle graphique choisie. Si on veut l'aire sous la courbe en cm² par exemple, il faut multiplier l'intégrale par la valeur en cm² de l'unité d'aire.

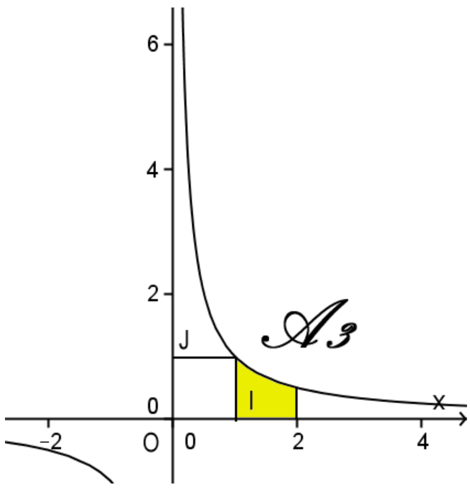
Exemples



$$\mathcal{A}_1 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \times \mathbf{4}\ cm^2$$



$$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \times \mathbf{2}\ cm^2$$



$$\mathcal{A}_3 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \times \mathbf{1}\ cm^2$$

---

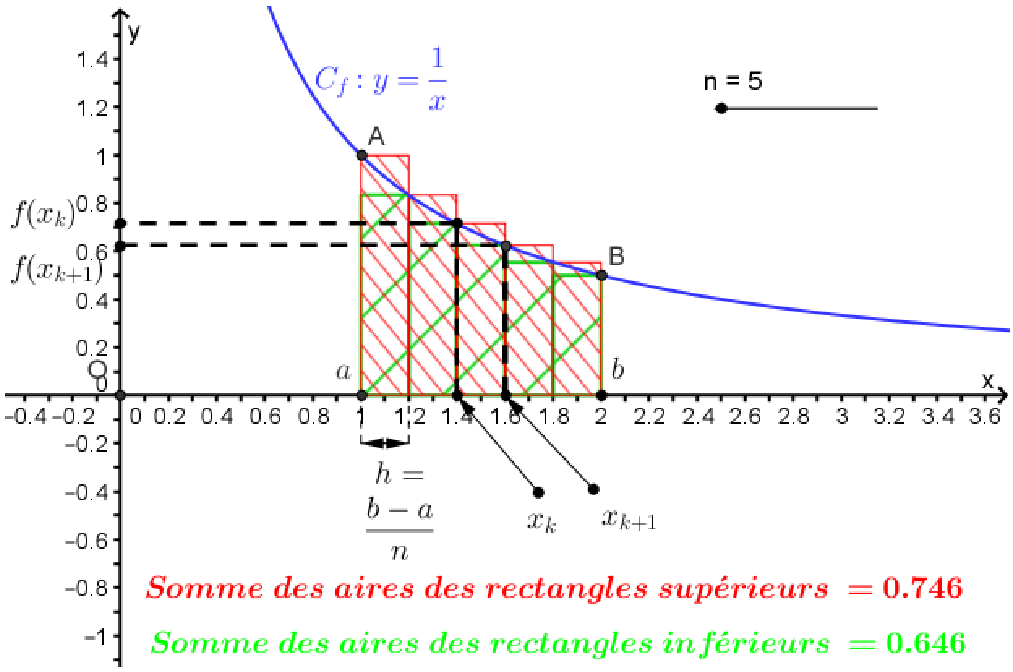
[1] **Gottfried Wilhelm LEIBNIZ** (1646 – 1716) : Mathématicien, scientifique, juriste et philosophe allemand.

1.2 Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive

Pour déterminer une approximation de l'intégrale d'une **fonction continue monotone et positive** sur $[a; b]$, on peut partager l'intervalle $[a; b]$ n sous-intervalles de même amplitude h :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Exemple



- Ici l'intervalle $[1; 2]$ est partagé en $n = 5$ sous-intervalles d'amplitude $\frac{1}{5}$.

Les sous-intervalles sont du type $[x_k\,; x_{k+1}]$ avec k entier variant entre 0 et 4.

- Le premier sous-intervalle correspond à $k = 0$.

C'est le sous-intervalle $[x_0\,; x_1]$
Le dernier sous-intervalle correspond à $k = 4$.
C'est le sous-intervalle $[x_4\,; x_5]$

- Pour chacun des sous intervalles, on construit un rectangle inférieur situé en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ et un rectangle supérieur situé au-dessus de la courbe.

Sur la figure précédente (cas d'une fonction décroissante sur $[a; b]$), le rectangle inférieur correspondant au sous-intervalle $[x_k\,; x_{k+1}]$ a pour hauteur $f(x_{k+1})$ et a pour aire $h \times f(x_{k+1})$.
Toujours dans le cas d'une fonction décroissante sur $[a; b]$, le rectangle supérieur correspondant au sous-intervalle $[x_k\,; x_{k+1}]$ a pour hauteur $f(x_k)$ et a pour aire $h \times f(x_k)$.

- L'aire de la surface située sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a; b]$ est encadrée par la somme des aires des n rectangles inférieurs et la somme des aires des n rectangles supérieurs.

Dans le cas d'une fonction f croissante sur $[a; b]$, les rectangles d'aires $h \times f(x_k)$ sont les rectangles inférieurs et les rectangles d'aires $h \times f(x_{k+1})$ sont les rectangles supérieurs.

Lorsque f est continue, monotone (croissante ou décroissante) et positive sur $[a; b]$, l'intégrale est encadrée par :

Si f est monotone **croissante** alors :	Si f est monotone **décroissante** alors :
$\sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_k) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_{k+1})$	$\sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_{k+1}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_k)$

On écrit un algorithme :

- Qui demande à l'utilisateur de saisir les bornes a et b de l'intervalle d'intégration ainsi que le nombre n de sous-intervalles.
- Qui fournit les sommes $\sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_k)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} h \times f(x_{k+1})$

La première somme est inférieure à la deuxième lorsque la fonction f est croissante sur $[a; b]$.
Au contraire, elle est supérieure lorsque la fonction f est décroissante sur $[a; b]$.
Dans tous les cas, on obtient un encadrement de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

<u>Déclaration des variables</u>

A, B, H, U, V, X réels
K, N entiers

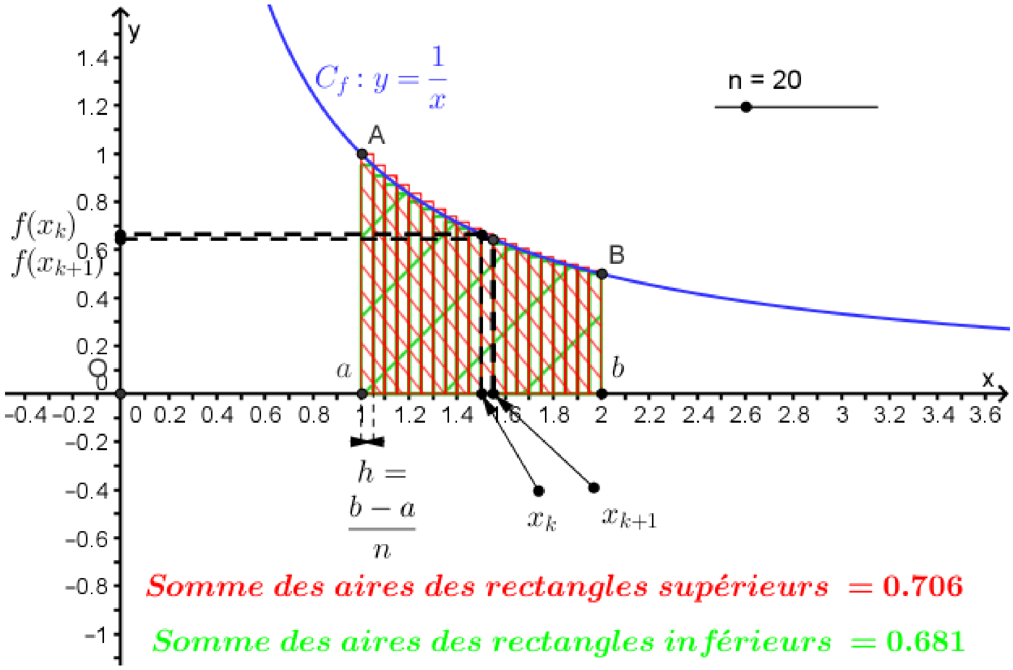
Début algorithme :

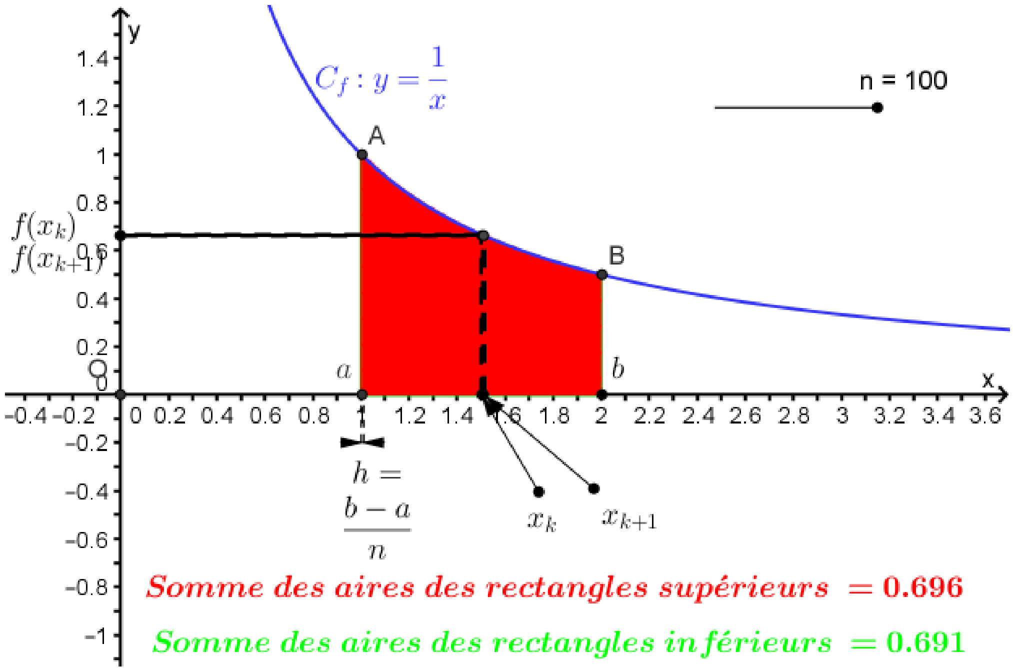
```
    Saisir A, B, N
    H prend la valeur (B-A)/N
    X prend la valeur A
    U prend la valeur 0                    (U sert à cumuler les aires h × f(x_k))
    V prend la valeur 0                    (V sert à cumuler les aires h × f(x_{k+1}))
    Pour K variant de 0 à N − 1
        U prend la valeur U + H * f(X)          (f(X) est l'expression de la fonction f)
        X prend la valeur X + H
        V prend la valeur V + H * f(X)
    Fin Pour
    Afficher U
    Afficher V
```

Fin Algorithme

L'encadrement de l'intégrale a une amplitude d'autant plus faible que le nombre n de sous-intervalles est grand. Par exemple, pour la fonction inverse, décroissante sur [1 ; 2], on obtient :

$\boldsymbol{n = 5}$	$\boldsymbol{n = 20}$	$\boldsymbol{n = 100}$
$\begin{cases} U = 0{,}746 \\ V = 0{,}646 \end{cases}$	$\begin{cases} U = 0{,}706 \\ V = 0{,}681 \end{cases}$	$\begin{cases} U = 0{,}696 \\ V = 0{,}691 \end{cases}$
$0{,}646 \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 0{,}746$	$0{,}681 \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 0{,}706$	$0{,}691 \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 0{,}696$
Amplitude = 0,1	Amplitude = 0,025	Amplitude = 0,005





2 Primitives d'une fonction continue

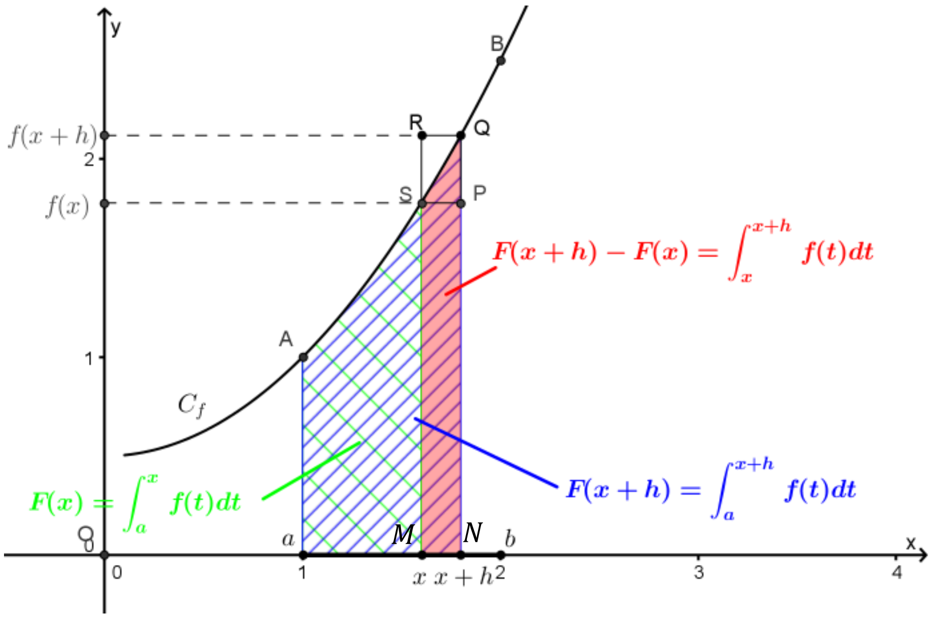
2.1 Théorème fondamental

Si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et x un réel de $[a;b]$ alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **dérivable sur** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Démonstration

- 1er cas :

Soit la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ où on suppose que f est **strictement croissante** sur $[a;b]$.



Soit x et $x+h$ deux réels de $[a;b]$ avec $h > 0$.

Puisque f est positive sur $[a;b]$, alors $F(x)$ est l'aire hachurée en vert, $F(x+h)$ est l'aire hachurée en bleu et la différence $F(x+h) - F(x)$ est l'aire colorée en rouge.

On peut encadrer cette aire entre l'aire d'un rectangle inférieur et l'aire d'un rectangle supérieur.

Comme on a supposé que la fonction f est croissante sur $[a;b]$, on a l'encadrement :

$$h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h)$$

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

- Pour x donné dans $[a;b]$ on a :

$$\lim_{h \to 0} f(x) = f(x)$$

Comme f est continue en tout réel $x \in [a;b]$ alors on a :

$$\lim_{X \to x} f(X) = f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x) \quad \text{en posant } h = X - x$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

- $2^{\text{ème}}$ cas :

Si on considère la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ où on suppose que f est **strictement décroissante** sur $[a; b]$ on arrive au même résultat.

Enfin, si on considère que h est négatif, on arrive aussi à :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad \text{c'est à dire} \quad F'(x) = f(x)$$

<u>Conclusion :</u>
La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est f.

2.2 Primitives d'une fonction sur un intervalle

<u>Définition</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

<u>Exemple</u>
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 2$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x + 8$

<u>Théorème</u>

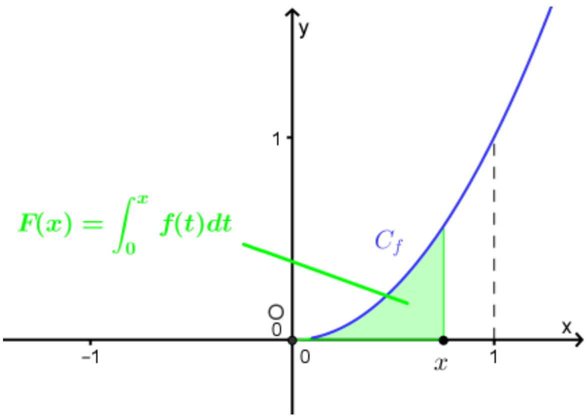
Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des fonctions primitives F sur cet intervalle.

<u>Démonstration</u>
Considérons une fonction f définie sur un intervalle $I = [a\,; b]$.

- 1^{er} cas :

Si f est continue et positive sur I, on est dans le cas du théorème fondamental vu au § 2.1 :
La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **dérivable sur $[a; b]$** et $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$**.**
Donc f a bien au moins une primitive : c'est la fonction F.

<u>Exemple</u>
La fonction f définie sur $[0\,; 1]$ par $f(x) = x^2$ est continue et positive sur $[0\,; 1]$.
Donc f a comme primitive la fonction F définie sur $[0\,; 1]$ par $F(x) = \int_0^x t^2 dt$.



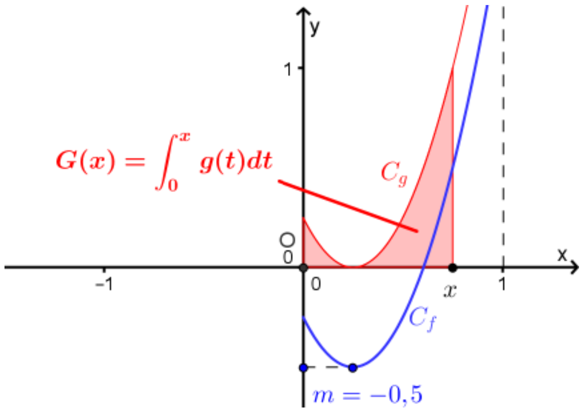
- 2ème cas : Si f est continue et de signe quelconque sur I, on définit la fonction g par $g(x) = f(x) - m$ où m est le minimum atteint par f sur l'intervalle I.

Exemple

La fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 4x^2 + 2x - 0{,}25$ est continue sur $[0\,;1]$ et a pour minimum $m = -0{,}5$.

Donc la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = f(x) + 0{,}5$ est continue et positive sur $[0\,;1]$.

Donc, d'après le théorème fondamental, g a comme primitive la fonction G définie sur $[0\,;1]$ par $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.



Soit F la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = G(x) - 0{,}5x$

F est une somme de fonctions dérivables sur $[0\,;1]$ donc F est dérivable sur $[0\,;1]$.

$$F'(x) = G'(x) - 0{,}5$$
$$F'(x) = g(x) - 0{,}5$$

Or, $g(x) = f(x) + 0{,}5$ Donc :

$$F'(x) = f(x) + 0{,}5 - 0{,}5$$
$$F'(x) = f(x)$$

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = G(x) - 0{,}5x$ est **dérivable sur $[0; 1]$** et $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$**.**

Donc f a bien au moins une primitive : c'est la fonction F.

Ce raisonnement peut être repris toute fonction f continue sur I en posant $g(x) = f(x) - m$

Conclusion :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des fonctions primitives F sur cet intervalle.

Remarque

Toutes les fonctions continues ont des primitives, mais il n'est pas toujours possible de connaitre leur expression $F(x)$ explicitement en fonction de x. C'est le cas par exemple de la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 2$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x + 8$.

Une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x + 4$.

Toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{5}{2}x^2 - 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété 2

Soit x_0 un réel de l'intervalle I. Soit y_0 un réel. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 2$. Déterminer la primitive G de f telle que $G(2) = 3$.

Réponse :

Toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $G: x \longmapsto \frac{5}{2}x^2 - 2x + k, k \in \mathbb{R}$.

$G(2) = 3$ équivaut successivement à :

$\frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + k = 3$

$10 - 4 + k = 3$

$k = -3$

Donc la primitive de f telle que $G(2) = 3$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - \mathbf{3}$

3 Recherche des primitives

3.1 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous :

Fonction f	**Une primitive F**	**Intervalle(s) de validité**
$f(x) = a$ Pour $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ Pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1; 0\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}\ x^{n+1}$	Si $n > 0$: $\mathbb{R}$ Si $n < 0$: $]-\infty\,; 0[$ ou $]0\,; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,; 0[$ ou $]0\,; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ Pour $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ Pour $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

<u>Exemples</u>

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \sqrt{2}\,x$$

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^4$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5$$

- Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = x^{-4}$ (c'est-à-dire $f(x) = \frac{1}{x^4}$)

  est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{-3}x^{-3}$$

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = \cos(\mathbf{2}x + 3)$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{\mathbf{2}}\sin(2x+3)$$

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = \sin(\mathbf{4}x + 5)$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{\mathbf{4}}\cos(4x+5)$$

3.2 Formes remarquables

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I. F et G sont des primitives de f et g sur I
u est une fonction dérivable sur I et $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	Une primitive	Conditions
kf	kF	
$f+g$	$F+G$	
$u'e^u$	e^u	
$u'u^n$ Pour $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n>0$: pas de condition Si $n<0$: $u(x) \neq 0, \ \forall x \in I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x)>0, \quad \forall x \in I$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0, \quad \forall x \in I$

Exemple 1

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3e^x + \frac{5}{x}$

Réponse : $f(x) = 3e^x + 5 \times \frac{1}{x}$ donc une primitive F de cette fonction sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ est définie par : $F(x) = 3e^x + 5\ \ln(x)$

Exemple 2

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^3+3x+2}{x^2}$$

Réponse :

Pour pouvoir utiliser le théorème « $F+G$ est une primitive de $f+g$ », on cherche à écrire $f(x)$ sous la forme d'une **somme :**

$$f(x) = -x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$f(x) = -x + 3 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x^2}$$

donc une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3\ln(x) + 2 \times -\frac{1}{x}$$

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 3\ln(x) - \frac{2}{x}$$

4 Intégrale d'une fonction continue

4.1 Calcul de l'intégrale d'une fonction positive sur $[a\,;b]$

Propriété

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$.

Si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration

- D'après le théorème fondamental vu au §2.1

Si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et x un réel de $[a;b]$ alors la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **une primitive de** f

De plus, si F est une primitive de f alors il existe une constante réelle k telle que $F(x) = G(x) + k$

Donc $F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k)$

$F(b) - F(a) = G(b) + k - G(a) - k$

$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

- En reprenant la définition de G :

$G(b) = \int_a^{\boldsymbol{b}} f(t)dt$

$G(a) = \int_a^{\boldsymbol{a}} f(t)dt = 0$

Conclusion :

$$F(b) - F(a) = \int_a^{\boldsymbol{b}} f(t)dt$$

4.2 Généralisation de la notion d'intégrale

4.2.1 Définition

Soit f une fonction **continue** et **de signe quelconque** sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque

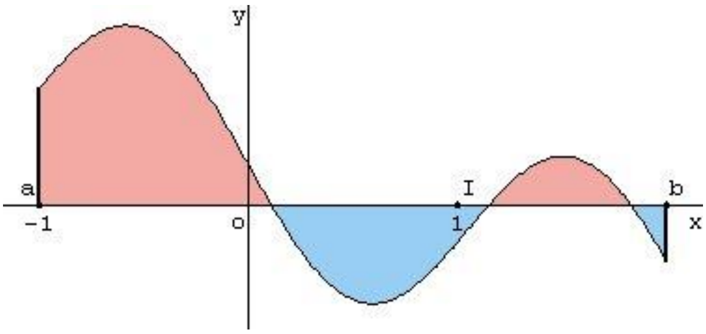
Avec cette définition, l'intégrale n'est plus nécessairement positive comme c'est le cas dans la définition de l'intégrale d'une fonction positive.

<u>Interprétation de l'intégrale d'une fonction de signe quelconque</u>

Soit f une fonction **continue** et de **signe quelconque** sur $[a\,;b]$.

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires définies à partir des intervalles sur lesquels $f(x)$ garde un signe constant. On additionne les aires quand f est positive. On **soustrait** les aires quand f est **négative**.

<u>Exemple</u> :



$\mathcal{D}_3$

$\mathcal{D}_4$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3) - \text{aire}(\mathcal{D}_4)$$

4.2.2 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Soir a, b, c trois réels de I et soit k un réel quelconque.

1.	$\int_a^a f(x)dx = 0$	
2.	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	
3.	$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	Linéarité pour la multiplication par un réel
4.	$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	Linéarité pour l'addition
5.	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	Relation de Chasles
6.	Si $a < b$ et si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$	Positivité
7.	Si $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$	Comparaison

5 Des applications du calcul intégral

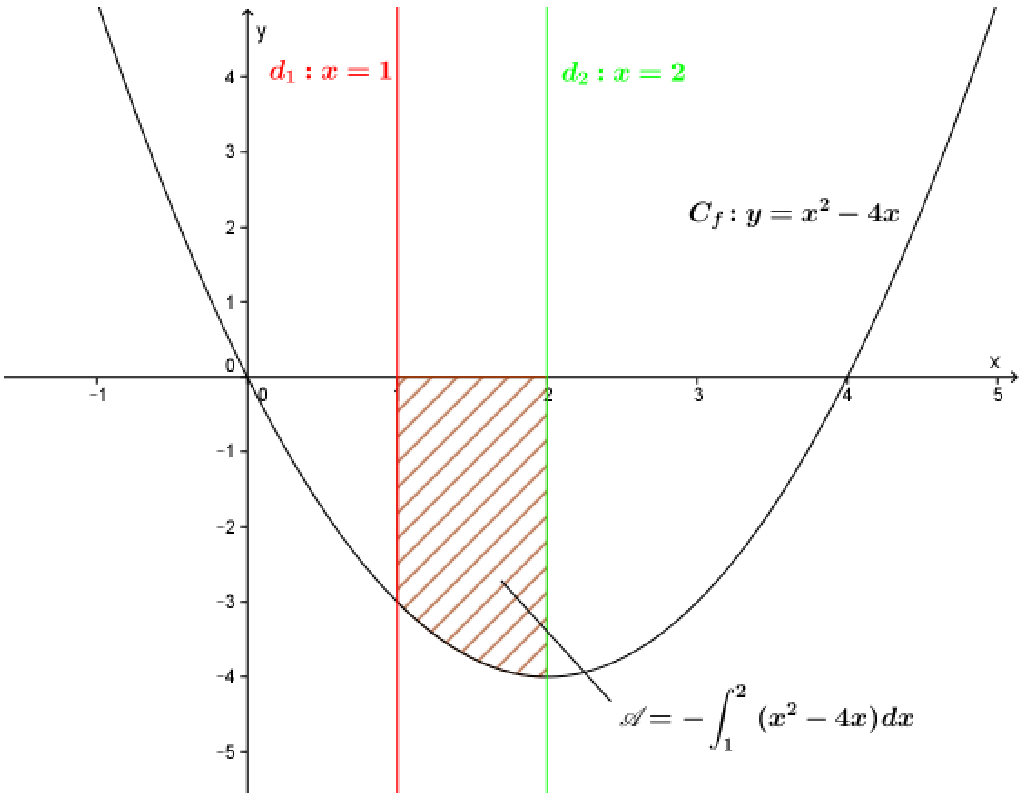
5.1 Calcul d'aires

Propriété 1

Si f est **continue** et **négative** sur $[a; b]$, l'aire exprimée en unité d'aire de la surface plane délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$-\int_a^b f(x)dx$$

Exemple



La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x$ est négative sur $[1 ; 2]$.
Donc l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à $-\int_1^2 (x^2 - 4x)dx$

Une primitive de f est F telle que $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

$\mathcal{A} = -(F(2) - F(1))$

$\mathcal{A} = -F(2) + F(1)$

$\mathcal{A} = -\left(\frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2\right) + \frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2$

$\mathcal{A} = -\frac{8}{3} + 8 + \frac{1}{3} - 2$

$\mathcal{A} = -\frac{7}{3} + 6$

$\mathcal{A} = \frac{11}{3}$ unité d'aire.   Si l'unité d'aire est 2 cm², alors $\mathcal{A} = \frac{22}{3}$ cm².

On peut vérifier à la calculatrice que $\int_1^2 (x^2 - 4x)dx = -\frac{11}{3}$ en tapant :

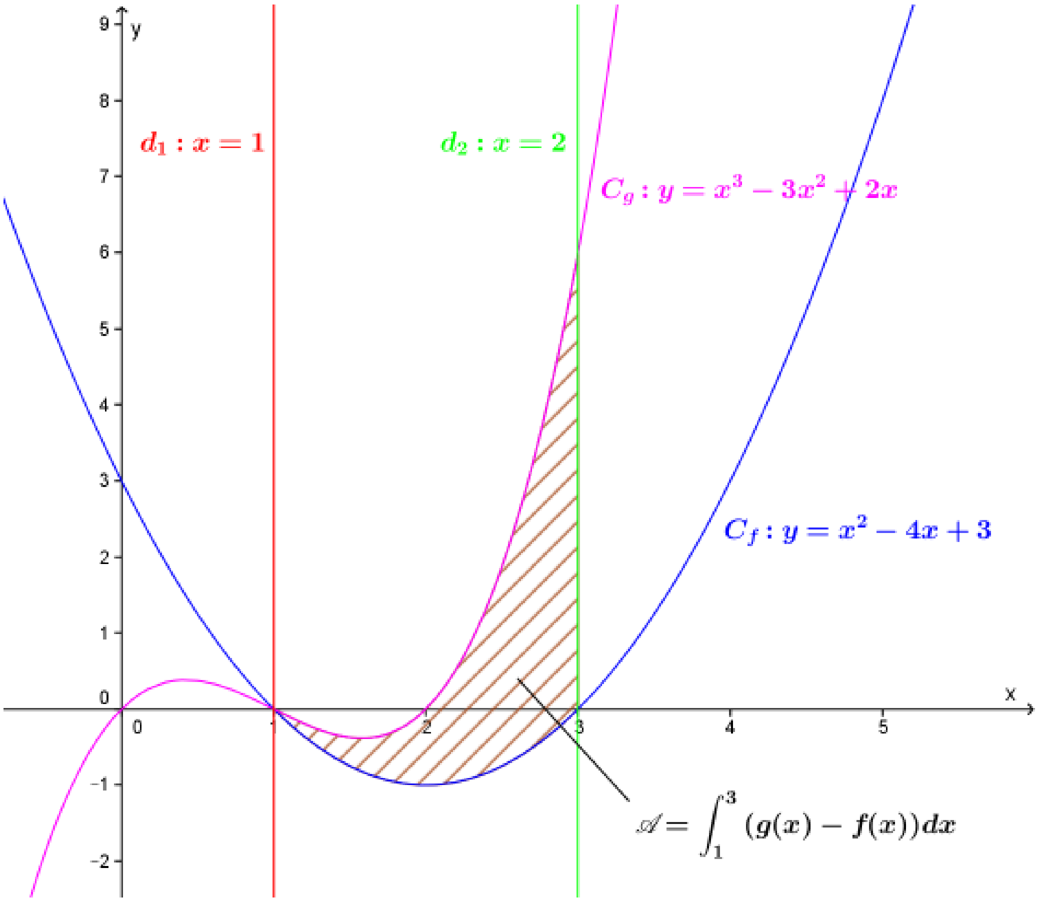
math MATH 9 : foncIntégr(X²-4X,X,1,2) entrer puis math Frac

<u>Propriété 2</u>

Si f et g sont **continues** et telles que $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$ sur $[a; b]$, alors l'aire exprimée en unité d'aire de la surface comprise **entre les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$** et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

<u>Exemple</u>



L'étude du signe de $g(x) - f(x)$ montre que sur l'intervalle $[1 ; 3]$, $f(x) \leq g(x)$

Donc l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire (notée $u.a$), de la surface comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est égale à $\int_1^3 (g(x) - f(x))dx$

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)dx$$

Une primitive de $g - f$ est $G - F$ telle que $(G - F)(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 3x$

$\mathcal{A} = (G - F)(3) - (G - F)(1)$

$\mathcal{A} = \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{4}{3}(3)^3 + 3(3)^2 - 3(3) - \left(\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{4}{3}(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1)\right)$ $\qquad \mathcal{A} = \frac{10}{3} u.a$

5.2 Valeur moyenne d'une fonction

Une application intéressante du calcul intégral est le calcul de la valeur moyenne d'une grandeur continue sur un intervalle.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

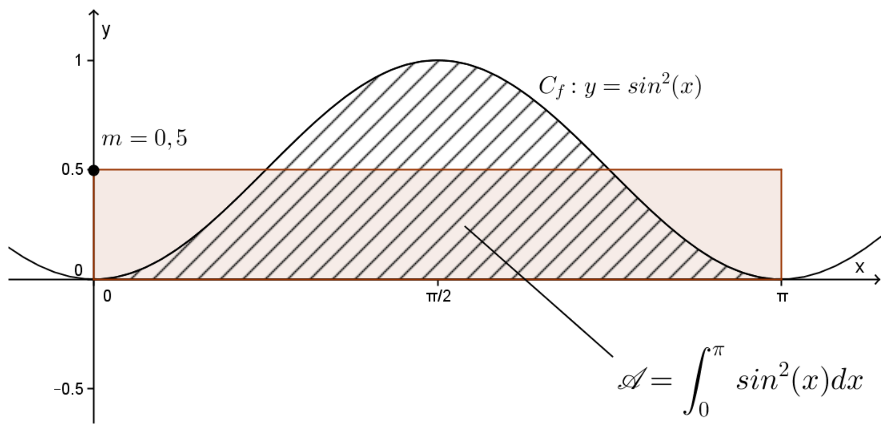
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$$

Remarque

Si la fonction f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne $\boldsymbol{m}$ **est la hauteur du rectangle** de largeur $b-a$ **qui a la même aire** que l'aire sous la courbe :

Exemple



- La valeur moyenne de la fonction f telle que $f(x) = (\sin(x))^2$ sur $[0\,;\pi]$ est égale à

$$m = \frac{1}{\pi - 0} \times \int_0^{\pi} (\sin(x))^2\, dx$$

- Pour trouver une primitive F de f, on linéarise[2] $f(x) = (\sin(x))^2$

On a $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$, donc $2(\sin(x))^2 = 1 - \cos(2x)$, d'où l'expression linéarisée :

$f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x)$ $\qquad F(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad F(0) = 0$

$$m = \frac{1}{\pi - 0} \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \qquad \boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$$

---

[2] Une expression **linéaire** en $sin(x)$ et $\cos(x)$ est une expression du type $a \times \sin(kx) + b \times \cos(k'x) + c$, c'est à dire sans produit de sinus ou de cosinus entre eux. Il est alors possible de trouver une primitive.