CHAPITRE 10 : Echantillonnage - Estimation

1 Effectifs et fréquences avec la loi binomiale 2

2 La valeur de la proportion *p* dans la population est connue. On prédit un intervalle de fluctuation I_n contenant la fréquence F_n 5

2.1 Définition de l'intervalle de fluctuation à 95 % avec la loi binomiale 5

2.2 Définition de I_n l'intervalle de fluctuation à 95 % avec la loi normale 5

2.3 Intervalle I_n de fluctuation asymptotique au seuil de (1-α)% 8

RÉSUMÉ : Échantillonnage dans une population où *p* est connue 10

3 La valeur de la proportion *p* dans la population est une hypothèse qu'on veut tester 11

4 La valeur de la proportion *p* dans la population est une inconnue qu'on estime par un intervalle de confiance I_c 13

RÉSUMÉ : Estimation par un intervalle de confiance de la proportion *p* qui reste inconnue 17

CHAPITRE 10 : Echantillonnage - Estimation

1 Effectifs et fréquences avec la loi binomiale

Notation :

Prélever un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ dans une population très nombreuse d'individus possédant un caractère considéré comme « succès » avec la probabilité p, revient à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

- On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre k de succès dans l'échantillon : $X_n = k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.
- On note F_n la variable aléatoire qui donne la fréquence $\frac{k}{n}$ de succès dans l'échantillon : $F_n = \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

Exemple 1 : Fréquence F_n dans un échantillon

Soit une population d'individus telle que 5 personnes sur 100 aient la grippe.

1) On prend un échantillon de taille $n = 220$ personnes dans cette population. Déterminer la probabilité d'observer un nombre X_{220} de malades dans l'échantillon tel que $7 \leq X_{220} \leq 15$.

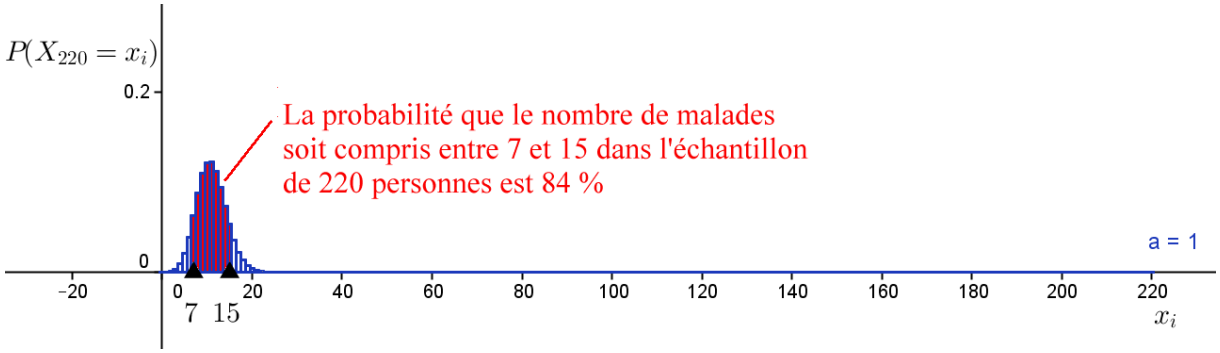
Réponse :

- Choisir 220 personnes dans une population importante revient à répéter 220 **épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**. On considère comme « succès » l'évènement « la personne a la grippe » (probabilité $p = 0{,}05$) et comme « échec » l'évènement « la personne n'a pas la grippe » (probabilité $q = 0{,}95$).
- Donc le nombre observé X_{220} dans l'échantillon de taille $n = 220$ peut **varier entre 0 et 220** et $\boldsymbol{X_n}$ **suit la loi binomiale $\mathcal{B}(220\,;0{,}05)$**.

Le calcul de $P(7 \leq X_{220} \leq 15)$ se fait à la calculatrice avec la fonction **binomFRép** :

$P(7 \leq X_{220} \leq 15) = P(X_{220} \leq 15) - P(X_{220} \leq 6)$

$P(7 \leq X_{220} \leq 15) = 0{,}84$ à 10^{-2} près.



2) Toujours dans l'échantillon de 220 personnes, on pose F_{220} la fréquence observée des malades de la grippe. Déterminer la probabilité de trouver une fréquence F_{220} observée de malades dans l'échantillon telle que $\frac{7}{220} \leq F_{220} \leq \frac{15}{220}$.

Réponse :

On a $F_{220} = \frac{X_{220}}{220}$.

$$\frac{7}{220} \leq F_{220} \leq \frac{15}{220}$$

équivaut successivement à

$$\frac{7}{220} \leq \frac{X_{220}}{220} \leq \frac{15}{220}$$

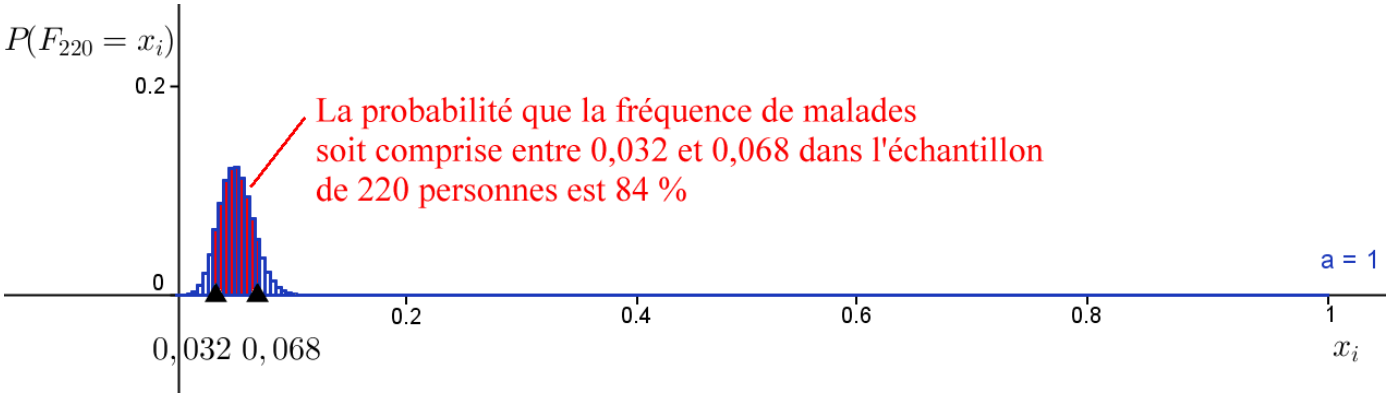
$$7 \leq X_{220} \leq 15$$

D'où :

$$P\left(\frac{7}{220} \leq F_{220} \leq \frac{15}{220}\right) = P(7 \leq X_{220} \leq 15) = 0{,}84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

ou encore, avec des valeurs approchées : $\frac{7}{220} \approx 0{,}032$ et $\frac{15}{220} \approx 0{,}068$ donc

$$P(0{,}032 \leq F_{220} \leq 0{,}068) = 0{,}84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$



Propriété :

Si F_n est la fréquence d'observation d'un caractère binaire (chaque individu possède ou ne possède pas une certaine caractéristique) sur un échantillon de taille n, alors :

$$P\left(\frac{\alpha}{n} \leq F_n \leq \frac{\beta}{n}\right) = P(\alpha \leq X_n \leq \beta)$$

où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ et où α et β sont des entiers de l'intervalle $[0\,;n]$.

Exemple 2 : Intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence observée

1) En reprenant la même population que dans l'exemple 1, déterminer les entiers a et b tels que :

a soit le plus petit entier tel que $P(X_{220} \leq a) > 0{,}025$.

b soit le plus petit entier tel que $P(X_{220} \leq b) \geq 0{,}975$.

Réponse :

On cherche $P(X_{220} \leq x_i)$ avec les probabilités cumulées de la loi $\mathcal{B}(220\,;0{,}05)$:

- Soit a le premier entier tel que $P(X_{220} \leq a) > 0{,}025$
- Soit b le premier entier tel que $P(X_{220} \leq b) \geq 0{,}975$

A la calculatrice, on utilise les listes L_1 et L_2 pour calculer les **probabilités cumulées** de la loi binomiale à l'aide de la fonction binomFRép(220, 0.05 ,….)

- Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe L_1, L_2
- Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Edite.

Remplissage de la liste L_1 avec les entiers x_i compris entre 0 et 220 :

- Sélectionner le titre de la colonne L_1, entrée, et saisir la formule $L_1 = \text{suite}(X, X, 0{,}220)$

Pour trouver la fonction suite, appuyer sur [2nde] [listes] et aller dans le menu OPS.

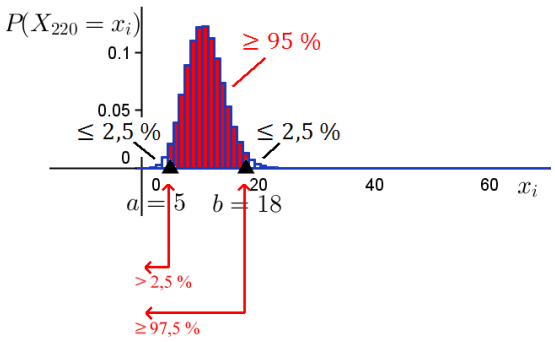
Remplissage de la liste L_2 avec les probabilités $P(X_{220} \leq x_i)$:

- Sélectionner le titre de la colonne L_2, entrée, et saisir $L_2 = \text{binomFRép}(220, 0.05, L_1)$

Pour trouver la fonction binomFRép, appuyer sur [2nde] [distrib] et descendre dans le menu DISTRIB.

Après quelques dizaines de secondes de calcul, les listes sont prêtes :

L_1	L_2
4	0,0134
5	**$\mathbf{0,0342}$ est la 1ère valeur supérieure à 2,5%**
…	…
…	…
17	0,9714
18	**$\mathbf{0,9848}$ est la 1ère valeur supérieure à 97,5%**
…	…



$a = \mathbf{5}$ est le premier entier tel que $P(X_{220} \leq a) > 0{,}025$
et $b = \mathbf{18}$ est le premier entier tel que $P(X_{220} \leq b) \geq 0{,}975$.

La probabilité que l'on observe un nombre de malades X_{220} entre 5 et 18 dans l'échantillon est :

$$0{,}9848 - 0{,}0134 = 0{,}9714 \text{ soit environ } 0{,}97.$$

2) Que peut-on en déduire pour la fréquence F_{220} de malades dans l'échantillon de taille $n = 220$?

Réponse :

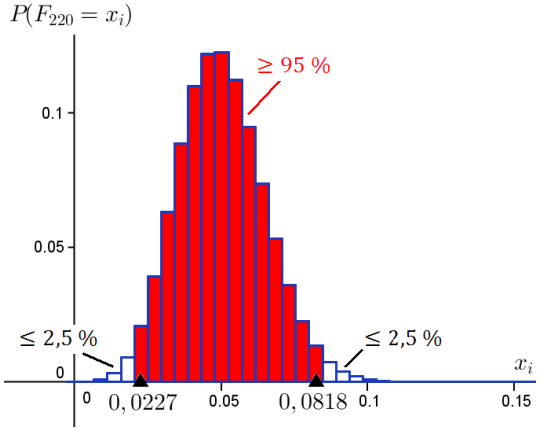
D'après la propriété précédente :

$$P\left(\frac{5}{220} \leq F_{220} \leq \frac{18}{220}\right) = P(5 \leq X_{220} \leq 18)$$

Avec des valeurs approchées, on a :

$$P(0{,}0227 \leq F_{220} \leq 0{,}0818) \approx 0{,}9848 - 0{,}0134$$

$$P(0{,}0227 \leq F_{220} \leq 0{,}0818) \approx 0{,}97$$



La probabilité que l'on observe une fréquence entre 0,0227 et 0,0818 de malades dans un échantillon de 220 personnes est $0{,}97 \approx \mathbf{0,95}$. L'intervalle $\boldsymbol{I_{220}} = \left[\frac{5}{220}\,;\frac{18}{220}\right]$ est l'**intervalle de fluctuation de $\boldsymbol{F_{220}}$ au seuil 95 %.**

2 La valeur de la proportion p dans la population est connue. On prédit un intervalle de fluctuation I_n contenant la fréquence F_n

On suppose que la taille de la population est très grande, de sorte que les prélèvements des individus soient considérés comme une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes à 2 issues : l'individu a le caractère avec la probabilité p « succès » ou il ne l'a pas avec la probabilité $q = 1 - p$ « échec ». On **prédit** un intervalle de fluctuation I_n dans lequel **il est probable** que se situe la fréquence F_n des individus qui présentent ce caractère observée sur cet échantillon de taille n.

2.1 Définition de l'intervalle de fluctuation à 95 % avec la loi binomiale

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $F_n = \frac{X}{n}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence observée des « succès » dans un échantillon de taille n.

Un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % est un intervalle :

- I_n est de la forme $\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$ où a et b sont des entiers compris entre 0 et n
- I_n est tel que $P\left(\frac{a}{n} \leq F_n \leq \frac{b}{n}\right) \geq 0{,}95$ ce qui équivaut à $P(a \leq X_n \leq b) \geq 0{,}95$

En pratique[1], on cherche avec **binomFRép** le plus petit entier a tel que $P(X_n \leq a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X_n \leq b) \geq 0{,}975$.

2.2 Définition de I_n l'intervalle de fluctuation à 95 % avec la loi normale

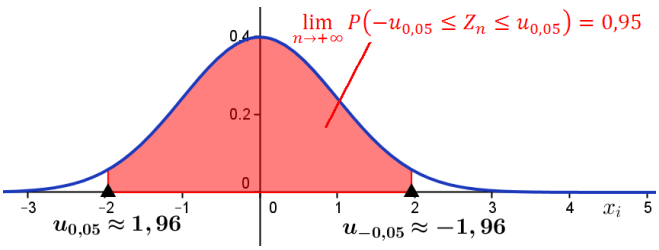
1. Théorème de Moivre-Laplace pour la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05})$

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus possédant le caractère étudié dans un échantillon de taille n. X_n suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$. Soit $Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ la variable X_n centrée réduite.

Pour connaitre I_n l'intervalle de fluctuation avec la loi normale au seuil 95 %, on écrit le théorème de Moivre-Laplace avec les bornes $-u_{0,05}$ et $u_{0,05}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}) = \int_{-u_{0,05}}^{u_{0,05}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}) = 0{,}95.$$



FracNormale(0,975) donne $U_{0,05} \approx 1{,}96$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}) = 0{,}95$.

2. On écrit une équivalence de $-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}$ qui fasse intervenir $F_n = \frac{X_n}{n}$

$-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}$ Equivaut successivement à : $-u_{0,05} \leq \frac{X_n - \mu}{\sigma} \leq u_{0,05}$

---

[1] Ces définitions de a et b viennent du fait qu'il faut au moins 95 % des probabilités cumulées lorsque $a \leq X_n \leq b$ et donc on a $P(X_n \leq a - 1) \leq 0{,}025$ et $P(X_n \geq b + 1) \leq 0{,}025$.

$$-u_{0,05} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq u_{0,05}$$

$$-u_{0,05}\sqrt{npq} \leq X_n - np \leq u_{0,05}\sqrt{npq}$$

$$np - u_{0,05}\sqrt{npq} \leq X_n \leq np + u_{0,05}\sqrt{npq}$$

$$\frac{1}{n}\left(np - u_{0,05}\sqrt{npq}\right) \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{1}{n}\left(np + u_{0,05}\sqrt{npq}\right)$$

$$p - \frac{u_{0,05}\sqrt{npq}}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_{0,05}\sqrt{npq}}{n}$$

$$p - \frac{u_{0,05}\sqrt{n}\sqrt{pq}}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_{0,05}\sqrt{n}\sqrt{pq}}{n}$$

$$p - \frac{u_{0,05}\sqrt{n}\sqrt{pq}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_{0,05}\sqrt{n}\sqrt{pq}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$$

$$p - \frac{u_{0,05}\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_{0,05}\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$\boldsymbol{p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05} \quad \Leftrightarrow \quad p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}}$$

3. On conclut sur $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)$

On a démontré $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05}) = 0,95 \quad (partie\ 1) \\ -u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05} \quad \Leftrightarrow \quad p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \quad \text{(partie 2)} \end{cases}$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

ou encore : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = 0,95$ en posant $I_n = \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$.

On appelle I_n **l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 %** car, quand la taille n de l'échantillon tend vers $+\infty$, la probabilité que F_n se situe dedans tend vers $0,95$.
En pratique, si $n \geq 30$, avec $np \geq 5$ et $nq \geq 5$, la probabilité que F_n soit dedans est proche de $0,95$.

Exemple :

Sur une population d'individus, 5 personnes sur 100 ont la grippe. On prend un échantillon de $n = 220$ personnes. Déterminer l'intervalle de fluctuation I_{220} au seuil de 95 % avec la loi normale.

Réponse :

La population présente une proportion $p = 0,05$ d'individus atteints par la grippe. On a comme taille d'échantillon $n = 220$. L'intervalle de fluctuation asymptotique est :

$$I_{220} = \left[p - u_{0,05} \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{220}} \; ; \; p + u_{0,05} \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{220}} \right]$$

$$I_{220} = \left[0{,}05 - u_{0,05} \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \; ; \; 0{,}05 + u_{0,05} \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \right]$$

On a $u_{0,05} \approx 1{,}96$

$$0{,}05 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \approx \mathbf{0{,}0212}$$

$$0{,}05 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \approx \mathbf{0{,}0788}$$

D'où $\boldsymbol{I_{220}} = [\mathbf{0{,}021} \; ; \; \mathbf{0{,}079}]$ en arrondissant les bornes de l'intervalle de fluctuation à 10^{-3} près.

Remarques :

- On avait trouvé l'intervalle de fluctuation en utilisant la loi binomiale $(0{,}0227 \leq F_{220} \leq 0{,}0818) \approx 0{,}95$. On n'a donc pas retrouvé la même chose exactement car $n = 220$ n'est pas l'infini. Cependant, l'intervalle de fluctuation obtenu avec la loi normale est assez proche.

- Si n est très grand alors l'approximation est très bonne. Cela est dû au fait qu'on assimile $P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05})$ où Z_n est une variable aléatoire discrète, à l'intégrale de la densité de la loi normale centrée réduite qui est égale à $\lim\limits_{n \to +\infty} P(-u_{0,05} \leq Z_n \leq u_{0,05})$.

- ⚠ En pratique, on considère que si les conditions suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 5 \\ nq \geq 5 \end{cases}$$

alors on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique I_n donné par la loi normale centrée réduite. Cet intervalle de fluctuation est d'autant plus précis que n la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$.

- On donne l'intervalle de fluctuation en arrondissant la borne inférieure par défaut et la borne supérieure par excès, de façon à garantir au moins 95% de probabilité pour que fréquence observée F_n soit dans cet intervalle.

- On peut définir l'intervalle de fluctuation asymptotique des valeurs de α autres que $\alpha = 0{,}05$. Par exemple $\alpha = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}10$ etc.

2.3 Intervalle I_n de fluctuation asymptotique au seuil de (1-α)%

Théorème :

Si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors pour tout réel $\alpha \in]0\,;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(p-u_\alpha\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\leq F_n\leq p+u_\alpha\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)\right)=1-\alpha$$

Autre écriture :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(F_n\in\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\;;\;p+u_\alpha\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]\right)\right)=1-\alpha$$

Démonstration (exigible) :

- Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'observations dans un intervalle de taille n. X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. X_n a comme valeurs les entiers $x_i \in [0\,;n]$

Soit $Z_n=\frac{X_n-\mu}{\sigma}$ la variable X_n centrée réduite. Z_n a comme valeurs les réels $\frac{x_i-\mu}{\sigma}\in\left[\frac{0-\mu}{\sigma}\;;\frac{n-\mu}{\sigma}\right]$

- Alors, d'après **le théorème de Moivre-Laplace**, pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{P(a\leq Z_n\leq b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.}$$

- Pour connaitre I_n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $(1-\alpha)\,\%$, on écrit le théorème de Moivre-Laplace avec $a=-u_\alpha$ et $b=u_\alpha$:

$$\lim_{n\to+\infty}P(-u_\alpha\leq Z_n\leq u_\alpha)=\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

- $-u_\alpha\leq Z_n\leq u_\alpha$

équivaut successivement à :

$-u_\alpha\leq\dfrac{X_n-\mu}{\sigma}\leq u_\alpha$

$-u_\alpha\leq\dfrac{X_n-np}{\sqrt{npq}}\leq u_\alpha$

$-u_\alpha\sqrt{npq}\leq X_n-np\leq u_\alpha\sqrt{npq}$

$np-u_\alpha\sqrt{npq}\leq X_n\leq np+u_\alpha\sqrt{npq}$

$\dfrac{1}{n}\left(np-u_\alpha\sqrt{npq}\right)\leq\dfrac{X_n}{n}\leq\dfrac{1}{n}\left(np+u_\alpha\sqrt{npq}\right)$

$p-\dfrac{u_\alpha\sqrt{npq}}{n}\leq\dfrac{X_n}{n}\leq p+\dfrac{u_\alpha\sqrt{npq}}{n}$

$p-\dfrac{u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{pq}}{n}\leq\dfrac{X_n}{n}\leq p+\dfrac{u_\alpha\sqrt{n}\sqrt{pq}}{n}$

$$p - \frac{u_\alpha \sqrt{n}\sqrt{pq}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_\alpha \sqrt{n}\sqrt{pq}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$$

$$p - \frac{u_\alpha \sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{u_\alpha \sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

- Conclusion :

Dans un échantillon de taille n prélevé dans une population avec une proportion p d'individus présentant un certain caractère, on observera que la fréquence F_n de ce caractère est dans l'intervalle :

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right]$$

avec une probabilité de $1 - \alpha$.

C'est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $\mathbf{1 - \alpha}$ % d'une fréquence F_n

Exemple :

Sur une population d'individus, 5 personnes sur 100 ont la grippe.
On prend un échantillon de $n = 220$ personnes. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{220} au seuil de 99 %.

Réponse :
La population présente une proportion $p = 0{,}05$ d'individus atteints par la grippe. On a comme taille d'échantillon $n = 220$. L'intervalle de fluctuation avec la loi normale est :

$$I_{220} = \left[p - u_{0{,}01} \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{220}} \; ; \; p + u_{0{,}01} \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{220}} \right]$$

$$I_{220} = \left[0{,}05 - u_{0{,}01} \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \; ; \; 0{,}05 + u_{0{,}01} \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \right]$$

On a $u_{0{,}01} \approx 2{,}58$ donné par FracNormale(0.995)

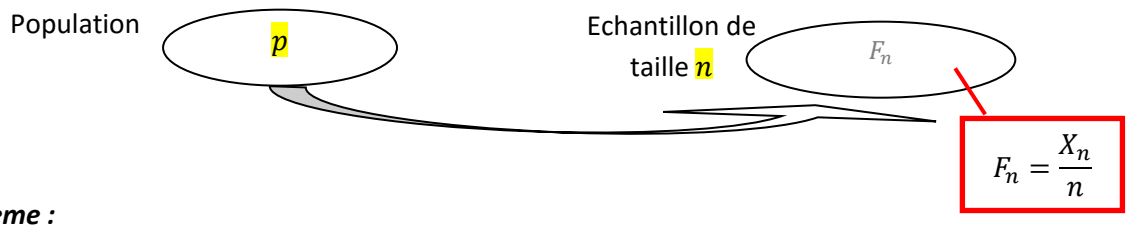
$$0{,}05 - 2{,}58 \times \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \approx \mathbf{0{,}0121}$$

$$0{,}05 + 2{,}58 \times \frac{\sqrt{0{,}05 \times 0{,}95}}{\sqrt{220}} \approx \mathbf{0{,}0879}$$

D'où $\boldsymbol{I_{220}} = [\mathbf{0{,}012} \; ; \; \mathbf{0{,}088}]$ en arrondissant les bornes de l'intervalle de fluctuation à 10^{-3} près.

Ainsi, dans un échantillon de 220 personnes, on peut prédire avec une probabilité de 99 % que la fréquence de personnes atteintes par la grippe sera entre $1{,}2$ % et $8{,}8$ % .

RÉSUMÉ : Échantillonnage dans une population où p est connue

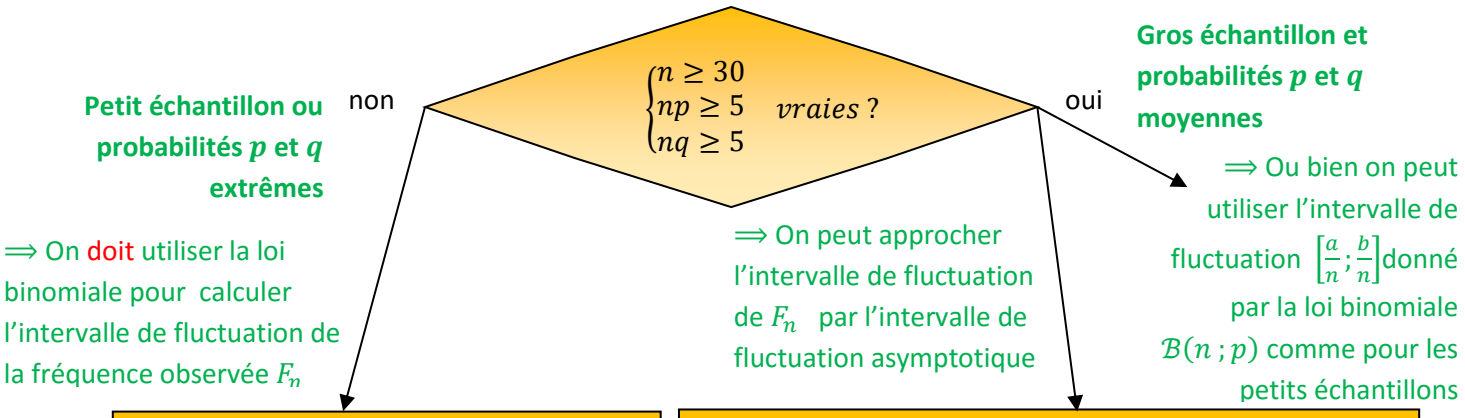


Position du problème :

- La proportion p d'individus présentant une certaine caractéristique dans la population est connue.
- On prélève un échantillon de n individus. On cherche à prédire par un intervalle de fluctuation, les valeurs probables de la fréquence F_n observée de cette caractéristique dans un échantillon de taille n connue.

$F_n = \frac{X_n}{n}$ où X_n est le nombre d'individus observés présentant la caractéristique dans l'échantillon de taille n.

On note q la proportion d'individus dans la population qui ne présentent pas la caractéristique. On a $q = 1 - p$.



L'intervalle de fluctuation, au seuil 95% de la fréquence F_n correspondant à la réalisation sur un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale, est :

$$I_n = \left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$$

$F_n \in I_n$ avec une probabilité d'au moins 0,95.

a et b sont les plus petits entiers tels que $\begin{cases} P(X_n \leq a) > 0{,}025 \\ P(X_n \leq b) \geq 0{,}975 \end{cases}$

Pour trouver a et b on utilise binomFRép sur la calculatrice.

Exemple : Dans une population, la proportion d'un caractère est $p = 0{,}3$. Donner L'intervalle de fluctuation, au coefficient 95% de la fréquence F_n du caractère sur un échantillon de taille 50.

$L_2 = binomFRép(50, 0.3, L_1)$ donne $a = 9$ et $b = 22$.

$$I_n = \left[\frac{9}{50}\,;\frac{22}{50}\right] \approx [0{,}18\,;\ 0{,}44].$$

La fréquence F_n dans l'échantillon suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(p;\frac{pq}{n}\right)$

L'intervalle de fluctuation, au seuil $1-\alpha$ % de la fréquence F_n correspondant à la réalisation sur un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale, est approximativement :

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + u_\alpha \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$$

$F_n \in I_n$ avec une probabilité d'au moins $1-\alpha$.

u_α est le réel positif tel que $P(X_n \in]-\infty\,;\,-u_\alpha[\,\cup\,]u_\alpha\,;\,+\infty[\,) = \alpha$

Pour trouver u_α on utilise FracNormale sur la calculatrice.

Exemple : Avec $n = 50$, $np = 50 \times 0{,}3 = 15$ et $nq = 50 \times 0{,}7 = 35$ les conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique sont vérifiées.

$u_{0{,}05} = FracNormale(0{,}975) \approx 1{,}960.$

$$I_n = \left[0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{50}}\,;0{,}3 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{50}}\right]$$
$$\approx [0{,}173\,;\ 0{,}427].$$

3 La valeur de la proportion p dans la population est une hypothèse qu'on veut tester

Dans ce paragraphe, on ne connait pas la proportion p d'individus dans la population à présenter un caractère donné.

- Mais on fait **une hypothèse (conjecture) sur la valeur de p**.

Après avoir conjecturé la valeur de p, on calcule l'intervalle de fluctuation I_n, ou bien par la loi binomiale, ou bien l'intervalle de fluctuation asymptotique, d'après la taille connue n de l'échantillon et d'après la valeur du risque α qu'on a choisie (par exemple $\alpha = 0{,}05$ c'est-à-dire $5\ \%$).

- On prélève un échantillon de taille n dans la population et on observe la fréquence F_n d'individus dans l'échantillon qui présentent le caractère.

- **Règle de décision :**

Le test de l'hypothèse sur la valeur de p repose sur la règle de décision suivante :

- La fréquence F_n observée appartient à l'intervalle de fluctuation. Donc cela veut dire que l'observation est compatible avec l'hypothèse faite sur la valeur de p. On accepte donc l'hypothèse ce qui veut dire qu'elle reste une hypothèse plausible.
- La fréquence F_n observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc cela veut dire que l'observation est incompatible avec l'hypothèse faite sur la valeur de p. Donc on rejettera l'hypothèse.

Exemple :

Un laboratoire annonce qu'un médicament sauve $40\ \%$ des patients atteints d'une maladie. Pour contrôler cette affirmation, on le teste sur 100 patients atteints de cette maladie.

Soit X_{100} le nombre de malades sauvés par ce médicament dans cet échantillon aléatoire de malades et assimilé à un tirage avec remise de taille $n = 100$.

On fait l'hypothèse : « La proportion de malades sauvés dans la population de malades est $p = 0{,}4$ »

1) Quelle est la loi suivie par X_{100} ?
2) Déterminer les plus petits entiers a et b tel que $P(X_{100} \leq a) > 0{,}025$ et $P(X_{100} \leq b) \geq 0{,}975$.
3) Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse "$p = 0{,}4$", selon la valeur de la fréquence F_{100} des malades sauvés dans l'échantillon.
4) Sur les 100 malades auxquels on a administré ce médicament, on en a sauvé 30. Au seuil de risque $5\ \%$, que peut-on dire de l'annonce faite par le laboratoire ?

Réponse :

1) Il s'agit d'une succession de 100 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (car on assimile le prélèvement de l'échantillon à un tirage avec remise). On appelle « succès » l'évènement « Le malade a été sauvé » avec la probabilité $p = 0{,}4$.

   Donc X_{100} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}4)$.

2) A la calculatrice, on utilise les listes L_1 et L_2 pour calculer les **probabilités cumulées** de la loi binomiale à l'aide de la fonction binomFRép(100, 0.4 ,….)

- Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe[2] L_1, L_2
- Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Edite.
- Sélectionner le titre de la colonne L_1, entrée, et saisir la formule $L_1 = \text{suite}(X\ , X, 0\ ,100)$

Pour trouver la fonction suite, appuyer sur (2nde) [listes] et aller dans le menu OPS.

- Sélectionner le titre de la colonne L_2, entrée, et saisir $L_2 = \text{binomFRép}(100\ , 0.4\ , L_1)$

Pour trouver la fonction binomFRép, appuyer sur (2nde) [distrib] et descendre dans le menu DISTRIB.

Après quelques secondes de calcul, les listes sont prêtes. On peut alors déterminer :

- Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$. On trouve $a = 31$.
- Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$. On trouve $b = 50$.

3) <u>Règle de décision :</u>

L'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence F_{100} est $I_{100} = \left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$

$I_{100} = \left[\frac{31}{100}\ ;\ \frac{50}{100}\right]$

$I_{100} = [0{,}31\ ;\ 0{,}5\ ]$

- Si la fréquence observée dans l'échantillon de malades sauvés F_{100} appartient à l'intervalle $I_{100} = [0{,}31\ ;\ 0{,}5\ ]$ alors on accepte l'hypothèse :

  " $la\ proportion\ de\ malades\ sauvés\ dans\ la\ population\ est\ p = 0{,}4$ "
- Si la fréquence observée dans l'échantillon de malades sauvés F_{100} n'appartient pas à l'intervalle $I_{100} = [0{,}31\ ;\ 0{,}5\ ]$ alors on rejette l'hypothèse :

  " $la\ proportion\ de\ malades\ sauvés\ dans\ la\ population\ est\ p = 0{,}4$ "

4) Sur les 100 malades auxquels on a administré ce médicament, on en a sauvé 30. Donc la fréquence observée est $F_{100} = 0{,}3$.

Donc $F_{100} \notin I_{100}$

Donc on rejette l'hypothèse H_0.

Mais le rejet se fait **au risque $5\ \%$ de se tromper** car il y a un une probabilité de $0{,}05$ que F_{100} soit à l'extérieur de l'intervalle $I_{100} = [0{,}31\ ;\ 0{,}5\ ]$ **du seul fait de la fluctuation d'échantillonnage**.

<u>Remarque :</u>

Dans cet exemple , on a :

$n = 100\ ;\quad np = 100 \times 0{,}4 = 40\ ;\quad nq = 100 \times 0{,}6 = 60$

Donc les trois conditions : $\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 5 \\ nq \geq 5 \end{cases}$ sont vérifiées.

Donc, à la place d'utiliser l'intervalle de fluctuation I_{100} donné par a et b de la loi $\mathcal{B}(100\ ;0{,}4)$, on aurait pu utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique $I_n = \left[p - u_{0{,}05}\ \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\ \ ;\ \ p + u_{0{,}05}\ \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$.

$I_{100} = \left[0{,}4 - 1{,}96\ \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{100}}\ \ ;\ \ 0{,}4 + 1{,}96\ \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{100}}\right] \qquad I_{100} = [0{,}304\ \ ;\ \ 0{,}4960].$

---

[2] Pour toute nouvelle utilisation des fonctions statistiques, penser à effacer les listes précédentes. Ainsi l'ancien contenu ne sera pas pris en compte dans les nouveaux calculs.

4 La valeur de la proportion p dans la population est une inconnue qu'on estime par un intervalle de confiance I_c

Le problème de l'estimation est le problème « inverse » de celui de la recherche d'un intervalle de fluctuation de la fréquence observée F_n étudié au paragraphe 2.

A partir de la fréquence F_n observée sur un échantillon de taille n, dans quel intervalle de confiance I_c peut se situer la proportion p des individus d'une population (de taille très grande) présentant un certain caractère ? L'estimation se fait toujours à un niveau de confiance donné.

Dans ce paragraphe 4, dans un souci de simplification :

- On se place toujours au niveau de confiance $95\ \%$ ce qui signifie que la proportion p inconnue a une probabilité de $0{,}95$ de se trouver dans l'intervalle de confiance I_c qu'on va calculer.
- Plutôt que d'utiliser l'intervalle de fluctuation de F_n au seuil $95\ \%$, démontré au §2.3 : $I_n = \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$, on utilisera l'intervalle de fluctuation « simplifié » :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Propriété 1 : F_n est dans un intervalle centré sur p

Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$ la fréquence observée d'individus présentant un certain caractère sur un échantillon de taille n.

Pour tout réel $p \in]0\,;1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors :

$$P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95$$

Démonstration :

- Etablissons un 1er résultat : **Pour tout $p \in]0\,;1[$, $4p(1-p) \leq 1$.**

Pour cela résolvons sur $]0\,;1[$ l'inéquation :

$$4p(1-p) \leq 1$$
$$-4p^2 + 4p - 1 \leq 0$$
$$4p^2 - 4p + 1 \geq 0$$
$$(2p-1)^2 \geq 0$$

Un carré étant toujours positif, **$4p(1-p) \leq 1$ est vrai pour tout $p \in]0\,;1[$.**

- Etablissons un 2e résultat : $\boldsymbol{F_n \in \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$.

$F_n \in \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$ implique successivement :

$$p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$-u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$|F_n - p| \leq u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$ Rappel : $|x| \leq r$ équivaut à $-r \leq x \leq r$.

$$|F_n - p| \leq 1{,}96\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$ $u_{0,05} \approx 1{,}96$ est une valeur à connaitre.

$$|F_n - p| \leq 2\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$|F_n - p| \leq 2\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$|F_n - p|^2 \leq 4\frac{pq}{n}$$

$$|F_n - p|^2 \leq 4\frac{p(1-p)}{n}$$

$$|F_n - p|^2 \leq \frac{1}{n} \times 4p(1-p)$$

Or d'après le 1er résultat préalable, $4p(1-p) \leq 1,\ \ \forall p \in]0\ ;\ 1[$, d'où :

$$|F_n - p|^2 \leq \frac{1}{n} \times 4p(1-p) \leq \frac{1}{n} \times 1$$

$$|F_n - p|^2 \leq \frac{1}{n}$$

$$|F_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ \ ;\ \ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Conclusion :

Si $F_n \in \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]$ alors $F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

- Reprenons le résultat du théorème du §2.3 :

On a montré que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(F_n \in \left[p - u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + u_{0,05}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right]\right)\right) = 0{,}95$$

Cela implique donc, en utilisant le deuxième résultat préalable :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)\right) \geq 0{,}95$$

En utilisant la définition d'une limite finie d'une suite, on obtient **la propriété 1** :

Pour tout réel $p \in]0\,;1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors :

$$P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95$$

Propriété 2 : p est dans un intervalle centré sur F_n

On part de la ***propriété 1***

Pour tout réel $p \in]0\,;1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors :

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

$$P\left(-F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

$$P\left(F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq p \geq F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

On peut donc conclure :

Propriété 2 : Pour tout réel $p \in]0\,;1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors :

$$P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95$$

Définition :

Soit une population où **la proportion p** des individus présentant un certain caractère **est inconnue**.

Soit F_n **la fréquence observée** de ce caractère dans un échantillon de taille n.

Alors, dans au moins 95 % des cas, la proportion p appartient à l'intervalle, dit **intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %** $\quad I_c = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

⚠ Cet intervalle de confiance peut être utilisé lorsque les conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ nF_n \geq 5 \\ n(1-F_n) \geq 5 \end{cases}$$

Exemple

Dans une urne contenant des boules blanches et bleues en proportions inconnues, on effectue des tirages au hasard avec remise.

1) Après avoir effectué 100 tirages, on compte 52 boules blanches (et donc 48 boules bleues). Donner l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de boules blanches p dans l'urne.
2) Combien faudrait-il, au minimum, effectuer de tirages pour obtenir un intervalle de confiance I_c au niveau de confiance 95% d'amplitude inférieure ou égale à 2.10^{-2} ?

Réponse :

1) On a un échantillon de taille $n = 100$.

La fréquence du caractère « la boule est blanche » est $F_{100} = 0{,}52$.

Les conditions pour l'utilisation de l'intervalle de confiance $\begin{cases} 100 \geq 30 \\ 100 \times 0{,}48 \geq 5 \\ 100 \times 0{,}52 \geq 5 \end{cases}$ Sont vérifiées.

Donc $I_c = \left[F_{100} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ F_{100} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$F_{100} - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}52 - \frac{1}{10}$ et $F_{100} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}52 + \frac{1}{10}$

Donc, l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $I_c = [0{,}42 \ ; \ 0{,}62]$.

Autrement dit, il y a au moins 95 chances sur 100 pour que la proportion de boules blanches dans l'urne soit comprise entre $0{,}42$ et $0{,}62$.

2) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(F_{100} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(F_{100} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 2.10^{-2}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2.10^{-2}$$
$$\frac{2}{2.10^{-2}} \leq \sqrt{n}$$
$$\sqrt{n} \geq 10^2$$
$$n \geq 10^4$$

En tirant 10^4 boules, l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est $0{,}02$.

Remarque :

Dans certains domaines, on utilise un intervalle de confiance plus précis :

$$I_c = \left[F_n - \mathbf{1{,}96}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}; F_n + \mathbf{1{,}96}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\right].$$

RÉSUMÉ : Estimation par un intervalle de confiance de la proportion p qui reste inconnue

Position du problème : Un échantillon E est connu

Par sa taille n et par F_n la fréquence d'apparition d'un caractère dans l'échantillon.

On cherche à estimer, par un intervalle de confiance, les valeurs probables de la proportion p des individus de la population P qui présentent ce caractère.

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ nF_n \geq 5 \\ n(1-F_n) \geq 5 \end{cases} \quad ?$$

Petit échantillon ou fréquences F_n et $1-F_n$ extrêmes — non ⟹ Hors programme de terminale

oui ⟹ On peut utiliser une loi normale pour p — **Gros échantillon et probabilités F_n et $1-F_n$ moyennes**

La proportion p de la population suit la loi :

$$\mathcal{N}\left(F_n\,;\,\frac{F_n(1-F_n)}{n}\right)$$

L'intervalle de confiance au niveau **95%** de p est :

$$I_c = \left[F_n - \mathbf{1,96}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\,;F_n + \mathbf{1,96}\sqrt{\frac{F_n(1-F_n)}{n}}\right]$$

$p \in I_c$ au risque 5% qu'elle n'y soit pas.

Ou de façon moins précise mais simplifiée :

Dans au moins **95%** des cas, la proportion p dans la population appartient à l'intervalle

$$I_c = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$p \in I_c$ avec un risque inférieur à 5% qu'elle n'y soit pas.

Exemple :

On a observé sur un échantillon de 500 personnes que 21 % étaient cardiaques. Calculer l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95% dans lequel peut se situer la proportion p de personnes cardiaques parmi toute la population.

Réponse :

Ici, on a : $\begin{cases} n = 500 \\ nF_n = 500 \times 0{,}21 = 105 \\ n(1-F_n) = 500 \times 0{,}79 = 395 \end{cases}$ Donc les conditions $\begin{cases} n \geq 30 \\ nF_n \geq 5 \\ n(1-F_n) \geq 5 \end{cases}$ sont vérifiées.

- Méthode précise :

$$I_c = \left[0{,}21 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}21 \times 0{,}79}{500}}\ ;0{,}21 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}21 \times 0{,}79}{500}}\right]$$

$$I_c = [0{,}21 - 0{,}036\ ;\ 0{,}21 + 0{,}036]$$

$$I_c = [0{,}174\ ;\ 0{,}246]$$

La proportion de cardiaques dans la population $p \in [0{,}174\ ;\ 0{,}246]$ avec un niveau de confiance de 95%.

- Méthode simplifiée :

$$I_c = \left[0{,}21 - \frac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ 0{,}21 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right]$$

$$I_c = [0{,}21 - 0{,}045\ ;\ 0{,}21 + 0{,}045]$$

$$I_c = [0{,}165\ ;\ 0{,}255]$$

La proportion de cardiaques dans la population $p \in [0{,}165\ ;\ 0{,}255]$ avec un niveau de confiance de 95% (au moins)