

Exercice 1

Question 1: On programme sur la calculatrice, en mode suite:
suite(n)

$$nMin = 0$$

$$u(n) = n^2 + 1$$

la représentation graphique est celle du C

Question 2: On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 25$
 $a > 0$ donc la fonction f présente un minimum pour $\alpha = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

Donc (v_n) est croissante à partir de $n = 2$ D

Question 3:

$$n^2 - 1 > 10000$$

$$n^2 > 10001$$

$$n > \sqrt{10001}$$

$$\sqrt{10001} \approx 100,005.$$

Donc $n^2 - 1 > 10000$ à partir de $n = 101$ D

Question 4:

$$3 < \frac{2}{n} + 3 < 3,01$$

$$0 < \frac{2}{n} < 0,01$$

$$\frac{n}{2} > 100$$

$$n > 200$$

Donc $3 < t_n < 3,01$ à partir de $n = 201$ D

Exercice 2

1)

	n	u_n
1/6/2017	0	$u_0 = 3000$
1/6/2018	1	$u_1 = 3000 + 80 - 0,05(3000 + 80)$ $u_1 = (3080) \times 0,95$ $u_1 = 2926$

2)

$$u_{n+1} = u_n + 80 - 0,05(u_n + 80)$$

$$u_{n+1} = u_n + 80 - 0,05u_n - 4$$

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 76 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3) a)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$$

$$v_{n+1} = 0,95u_n + 76 - 1520$$

$$v_{n+1} = 0,95u_n - 1444 \quad - \text{On a } v_n + 1520 = u_n$$

$$v_{n+1} = 0,95(v_n + 1520) - 1444$$

$$v_{n+1} = 0,95v_n + 1444 - 1444$$

$$v_{n+1} = 0,95v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Conclusion: la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,95$
de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 1520$

b)

$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{puisque } (v_n) \text{ est géométrique.}$$

$$v_n = 1480 \times 0,95^n \quad v_0 = 1480$$

Or $u_n = v_n + 1520$ donc $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) a)

$$n \leftarrow 0$$

$$u \leftarrow 3000$$

Tant que $u > 2000$

$$n \leftarrow n + 1$$

$$u \leftarrow 1480 \times 0,95^n + 1520$$

Fin Tant que

b) la valeur affichée par l'algorithme est 22.
En l'année $2017 + 22 = 2039$ le nombre de
cettes sera inférieur à 2000

Exercice 3

1) • Initialisation : $V_0 = 0$ donc $V_0 < 1$

• Hérité : Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a

$V_k < 1$
Montrons qu'alors $V_{k+1} < 1$

$$\begin{aligned} V_k &< 1 \\ -V_k &> -1 \\ 2 - V_k &> 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2 - V_k} < 1 \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$V_{k+1} < 1$$

• Conclusion : la propriété $P(n)$ $V_n < 1$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

2) a)

n	V_n
0	$V_0 = 0$
1	$V_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$
2	$V_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
3	$V_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

On peut conjecturer que $V_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • Initialisation : $V_0 = \frac{0}{0+1} = 0$ donc la propriété est vraie pour $n=0$

• Hérité : Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a
 $V_k = \frac{k}{k+1}$ Montrons qu'alors $V_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2 - V_k}$$

d'après la définition de la suite.

$$V_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence.

$$V_{k+1} = \frac{1}{\frac{2(k+1) - k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$V_{k+1} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

• Conclusion : $V_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ V_{n+1} - V_n &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} 1 > 0 \\ n+2 > 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$ donc $V_{n+1} - V_n > 0$
 $V_{n+1} > V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (3)
la suite (V_n) est croissante.

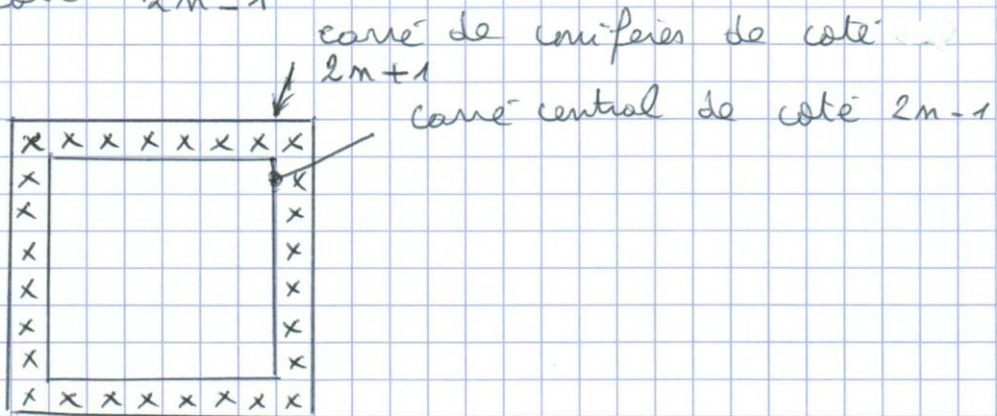
Exercice 4:

Nombre de conifères:

lorsqu'il y a n pommes sur un côté du carré, il y a $2n+1$ conifères sur ce même côté.

Si le carré était plein de conifères, il y en aurait $(2n+1)^2$.

Mais, c'est un carré évidé par un carré central de côté $2n-1$.



Donc le nombre de conifères lorsqu'il y a n rangées de pommes est $(2n+1)^2 - (2n-1)^2$
soit $4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 - 4n + 1) = 8n$

Nombre de pommes:

lorsqu'il y a n pommes sur un côté du carré, il y a n^2 pommes.

Equation: On cherche les solutions entières positives de l'équation

$$8n = n^2$$

Résolution:

$$8n = n^2$$

$$0 = n^2 - 8n$$

$$0 = n(n-8)$$

$$n=0 \quad \text{ou} \quad n-8=0$$

$$n=0 \quad \text{ou} \quad n=8$$

le nombre non nul tel qu'il y ait autant de conifères que de pommes est $n=8$