

Exercice 1

- 1) Max taille la plante : Il enlève 25% de sa hauteur. Il reste donc 75%. Puis la plante pousse de 30 cm.

Ainsi la taille devient $80 \times 0,75 + 30 = 90$
 En 2016 avant que Max ne la taille, la plante mesure 90 cm

- 2) a) la plante taillée à 75% de sa hauteur précédente mesure $0,75 h_n$. Puis elle pousse de 30 cm. Donc sa hauteur avant la taille suivante est $h_{n+1} = 0,75 h_n + 30$
- b) On conjecture que la suite est croissante.

Démontrons par récurrence la propriété: $P(n): h_n < h_{n+1}$

- Initialisation: $h_0 = 80$ et $h_1 = 90$ donc $h_0 < h_1$, la propriété est vraie pour $n=0$

- Hérédité: On suppose que pour un certain entier $k > 0$ on a $h_k < h_{k+1}$

Montrons qu'alors $h_{k+1} < h_{k+2}$

$$h_k < h_{k+1}$$

$$0,75 h_k < 0,75 h_{k+1}$$

$$0,75 h_k + 30 < 0,75 h_{k+1} + 30$$

$$h_{k+1} < h_{k+2} \quad \text{la propriété est héréditaire.}$$

- Conclusion

- la propriété est vraie au rang $n=0$
- la propriété est héréditaire

donc la propriété $h_n < h_{n+1}$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$

On en déduit que la suite (h_n) est monotone croissante.

Exercice 2

Partie A

- 1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 3$
 $x^2 - 1$ a deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
signe de 3	+	+	+	+
signe de $x^2 - 1$	+	0	-	+
signe de $g'(x)$	+	0	-	+
sens de variation de g		$\nearrow -2$	$\searrow -6$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$g(-1) = -2$$

$$g(1) = -6$$

- 2) • Si $x \in]-\infty; -1]$ alors $g(x) \leq -2$ d'après le tableau de variations. Donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

- Si $x \in [-1; 1]$ alors $-6 \leq g(x) \leq -2$ d'après le tableau de variations. Donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

- Si $x \in [1; +\infty[$ alors
 $\begin{cases} g \text{ est continue} \\ g \text{ est strictement croissante} \\ g \in [-6; +\infty[\end{cases}$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

A la calculatrice, on trouve $\alpha = 2,1958233$
 Donc $\alpha = 2,19$ (ou $\alpha = 2,20$) à 10^{-2} près.

- 3) On a la situation suivante:

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
sens de variation de g		$\nearrow -2$	$\searrow -6$	$\nearrow 0$	

on en déduit que :

- Si $x \in]-\infty; \alpha[$ alors $g(x) < 0$
 Si $x \in]\alpha; +\infty[$ alors $g(x) > 0$

Exercice 2

Partie B

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \quad \text{pour } x \in]1; +\infty[$$

1) a) f est définie et dérivable sur $]1; +\infty[$

$$f = \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} u(x) &= x^3 + 2x^2 & u'(x) &= 3x^2 + 4x \\ v(x) &= x^2 - 1 & v'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x[(3x+4)(x^2-1) - (x^3+2x^2)(2)]}{(x^2-1)^2}$$

b)

$$f'(x) = \frac{x[3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2]}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2-1)^2} = \frac{x g(x)}{(x^2-1)^2}$$

c) On utilise le résultat de la question A) 3)

x	1	x	$+\infty$
signe de x		+	+
signe de $g(x)$		-	+
signe de $(x^2-1)^2$		+	+
signe de $f'(x)$		-	+

2) Limite de f en 1^+

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
signe de x^2-1	+	0	-	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2) = 3$$

} donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

On en déduit que la courbe C_f a une asymptote verticale d'équation $x = 1$

Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

x	1	x	$+\infty$
signe de f'		-	+
sens de variation de f		$+\infty$	$+\infty$

On a $\alpha \approx 2,19$ à la calculatrice. On obtient: $f(\alpha) \approx 5,2935$
 $f(\alpha) = 5,29$ à l'op. 2

4) La tangente a pour équation $y = mx + p$ avec $m = f'(\alpha) = \frac{-4}{9}$
 $y = -\frac{4}{9}x + p$ et le point de contact $A(2; \frac{16}{3})$ d'où $p = \frac{56}{9}$
 Donc: $y = -\frac{4}{9}x + \frac{56}{9}$ (3)

Exercice 3

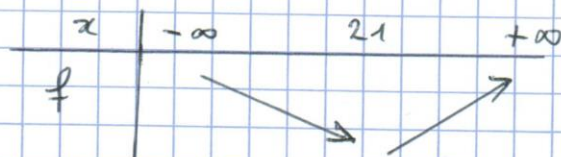
1) On a le tableau de variation suivant pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 4$

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

$$\alpha = \frac{4}{2} = 2$$

$a > 0$ donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$



Ainsi f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.
Donc la suite (p_n) définie par $p_n = f(n)$ n'est pas monotone.

L'affirmation " (p_n) est strictement décroissante" est FAUSSE.

2) $V_n = U_n^2 - 1$

$$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - 1 \quad \text{Or } U_{n+1} = \frac{1}{3} \sqrt{(U_n)^2 + 8} \quad \text{donc } V_{n+1} = \frac{1}{9} ((U_n)^2 + 8) - 1$$

Puisque $V_n + 1 = U_n^2$ alors $V_{n+1} = \frac{1}{9} ((V_n + 1) + 8) - 1$

$$V_{n+1} = \frac{1}{9} V_n + \frac{9}{9} - 1$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{9} V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite (V_n) est géométrique - L'affirmation est VRAIE.

3)

$$n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2 + n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \leq w_n \leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

Donc la suite (w_n) converge - L'affirmation est VRAIE.