Classes de terminales S T4, T5, T6 et T7	**Devoir de Mathématiques n° 3**	Vendredi 13 Décembre 2019
		Durée : 4 heures
Lycée Privé d'Avesnières		Calculatrice autorisée.

Nom, prénom : …………………………………………

<u>L'énoncé est à rendre avec la copie.</u>

<u>Exercice 1 :</u> *5 points*

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12000 individus en 2019. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60000 individus.

<u>Partie A :</u> Un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croit de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (V_n) où V_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2019 + n. On a donc $V_0 = 12$.

1/ Déterminer la nature de la suite (V_n) et donner l'expression de V_n en fonction de n.

2/ Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ? Justifier.

<u>Partie B :</u> Un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (U_n) définie par $U_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = -\dfrac{1}{550}\times(U_n)^2 + 1{,}1\,U_n$.

1/ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1}{550}x^2 + 1{,}1x$.

a/ Démontrer que g est croissante sur $[12\,;60]$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2/ On remarquera que $U_{n+1} = g(U_n)$.

a/ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $12 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 60$.

b/ Justifier que la suite (U_n) converge.

c/ On note ℓ la limite de la suite (U_n). Déterminer sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'énoncé.

3/ Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant :

```
Variables
    N est un entier naturel et U est un nombre réel
Début de l'algorithme
N←0
U←12
Tant que ….
    U← ….
    N← ….
Fin tant que
Afficher ….
Fin de l'algorithme
```

a/ Compléter cet algorithme sur cet énoncé.

b/ Quelle sera la valeur numérique affichée par l'algorithme ? En donner une interprétation concrète.

Exercice 2 : *6 points*

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

1/ a/ Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b/ Déterminer le tableau de variations complet de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2/ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α puis donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

3/ En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1/ Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2/ On admet que pour tout réel $x > 1$, on a $1 < x < x^2 < x^3$.

En déduire que pour tout réel $x > 1$, on a $4e^{-2x+1} < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$.

3/ a/ Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3e^{-2x+1} = \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$

b/ On admet que $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}(2x)^3e^{-2x} = 0$.

4/ En utilisant les questions 2 et 3, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

5/ Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$.

6/ A l'aide des résultats de la partie A, déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition ainsi qu'une valeur arrondie de $f(\alpha)$ à l'unité près.

Exercice 3 : *4 points*

1. Déterminer en justifiant, les limites suivantes :

   a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x}$

   b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5-\frac{4}{x^2}}$

   c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)^4$

   d) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{\frac{2-x}{x}}$

2. Déterminer les limites de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-5x+1}{-2x+6}$ aux bornes de I $=]-\infty;3[$.

   En donner une interprétation graphique.

3. Soit la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} k(x) = e^{\frac{1}{x}} & si\ x \in]-\infty;0[\\ k(x) = 3x^2 + 5x & si\ x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

   La fonction k est-elle continue en 0 ?

Exercice 4 : ***A faire uniquement par les élèves <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de Spécialité.*** *5 points*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par : $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$

1. a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;2\pi]$, $f'(x) = -\sin(x)[1+2\cos(x)]$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)[1+2\cos(x)] = 0$.

3. a) En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' donnée en annexe, dresser le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

b) Déduire des questions 2. et 3. a) le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. Préciser les ordonnées des points de la courbe représentative de *f* dont l'abscisse *x* vérifie $f'(x) = 0$.

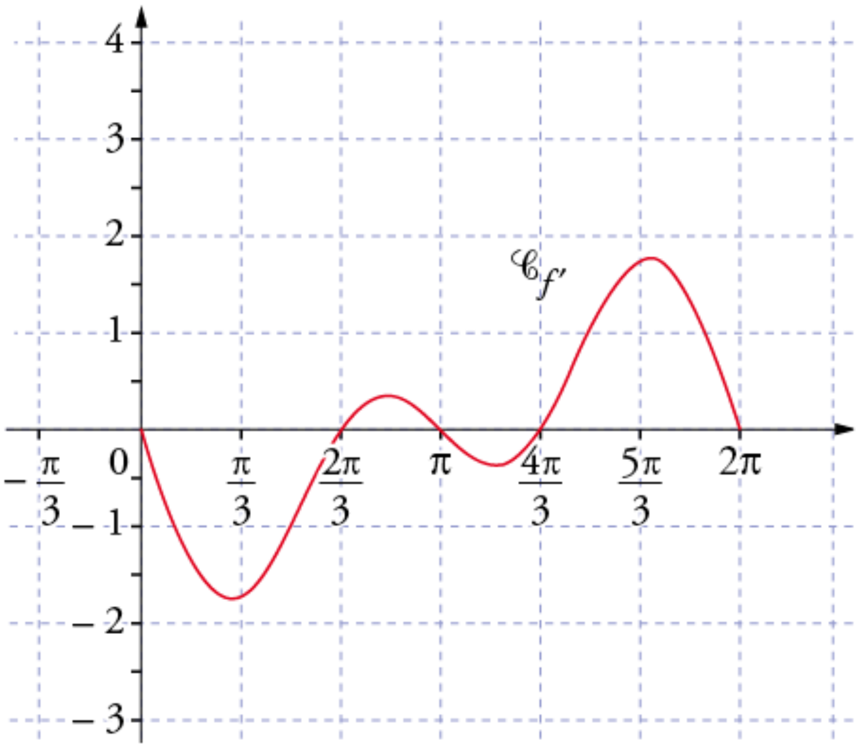
c) Donner le signe de la fonction *f* sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ dans le repère de l'annexe (où f'est déjà représentée).

Annexe

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle

$[0 ; 2\pi]$.



<u>Exercice 4 bis :</u> ***A faire uniquement par les élèves <u>suivant</u> l'enseignement de Spécialité.*** *5 points*
(à rendre sur une copie séparée)

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 3\,U_n + 1$.

On admet que, pour tout entier naturel n, U_n est entier.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.
2) Démontrer que les termes de la suite (U_n) sont alternativement pairs et impairs.
3) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.

   Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors U_p est premier. »
4) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2U_n = 3^n - 1$.

   b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

   c) En déduire que U_{2022} est divisible par 7.
5) a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (U_n).

   b) Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5					
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5					

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, si U_n est congru à 4 modulo 5 alors U_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

   d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division de U_n par 5 soit égal à 2 ?