

Exercice 1 Partie A Un premier modèle

- 1) Un accroissement de 5% correspond à une multiplication par 1,05.
Ainsi la suite est géométrique de premier terme $V_0 = 12$
et de raison $q = 1,05$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \underline{V_n = 12 \times 1,05^n}$

- 2) Si on calcule les termes $V_{32} = 57,179$ et $V_{33} = 60,038$ on s'aperçoit qu'au bout de 33 années les contraintes du milieu naturel qui font que la population ne peut pas dépasser les 60000 individus ne sont pas respectées.

Partie B Un second modèle

1) a) $g'(x) = -\frac{2}{550}x + 1,1$ $g'(x) = -\frac{1}{275}x + 1,1$

$g'(x) > 0$

$-\frac{1}{275}x + 1,1 > 0$

$-\frac{1}{275}x > -1,1$

$x < -1,1 \times -275$

$x < 302,5$

Donc sur $[12; 60]$ $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $[12; 60]$

b)

$g(x) = x$

$-\frac{1}{550}x^2 + 1,1x = x$

$-\frac{1}{550}x^2 + 0,1x = 0$

$x(-\frac{1}{550}x + 0,1) = 0$

$x = 0$ ou $-\frac{1}{550}x + 0,1 = 0$

$-\frac{1}{550}x = -0,1$

$x = 55$

Donc l'ensemble des solutions $\underline{J_{\mathbb{R}} = \{0; 55\}}$

- 2) a) Soit $P(n)$ la propriété $12 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 60$

• Initialisation : $u_0 = 12$ $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$
donc $12 \leq u_0 \leq u_1 \leq 60$

• Hérité - On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
 $12 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 60$

$g(12) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(60)$ car g est croissante sur $[12; 60]$

$12,938 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 59,455$

donc

$12 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 60$

• Conclusion - la propriété $12 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 60$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

- b) La propriété qu'on vient de démontrer montre que :

• la suite (u_n) est croissante.

• la suite (u_n) est majorée.

Donc, d'après le théorème de la convergence d'une suite monotone on peut affirmer que la suite (u_n) converge.

- c) l est une solution de l'équation $g(x) = x$.

On a vu à la question B) 1) b) qu'il y a 2 solutions.

on élimine 0 car la suite a pour 1^{er} terme $V_0 = 12$ et est croissante.

Donc $l = 55$

Ainsi, au bout d'un grand nombre d'années, la population tend vers 55000.

Variables

N est un entier naturel et U est un nombre réel

Début de l'algorithme

$N \leftarrow 0$

$U \leftarrow 12$

Tant que $U \leq 50$

$U \leftarrow (-1/550) * U^2 + 1.1 * U$

$N \leftarrow N + 1$

Fin tant que

Afficher N .

Fin de l'algorithme

Après l'exécution du programme qui traduit cet algorithme, on obtient $n = 36$.
Donc au bout de 36 années, la population dépasse 50000.

Exercice 2

Partie A

1) a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$$

par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

F.I du type $-\infty + \infty$

Donc on transforme l'écriture : $g(x) = x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
(on factorise la plus grande puissance de x)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -2$$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -6x^2 + 2x$$

$$g'(x) = 2x(-3x + 1)$$

x	$-\infty$	α	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $2x$		-	0	+	+
signe de $-3x + 1$		+	+	0	-
signe de $g'(x)$		-	+	-	-
variations de g	$+\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			-1	$-\frac{26}{27}$	$-\infty$

2). Sur $]-\infty; 0]$, la fonction g est continue
la fonction g est strictement décroissante
 $0 \in]-1; +\infty[$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α qui
est sur $]-\infty; 0]$.

• Sur $[0; +\infty[$, d'après le tableau de variation, g a un
maximum $-\frac{26}{27}$ qui est négatif. Donc $g(x) = 0$ n'a pas
de solution.

• Conclusion: L'équation $g(x) = 0$ a une unique solution
 α sur $\mathbb{R}$. Une valeur approchée est $\alpha = -0,7$ (ou $-0,6$)

3) On en déduit le signe de $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-

Partie B

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x+x^2+x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

} donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(-2x+1)} = +\infty$

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x+x^2+x^3) e^{-2x+1} = -\infty$

2) on a : $\forall x > 1$:

$$1 < x$$

$$1 < x^2$$

$$1 < x^3$$

donc $3 < x+x^2+x^3$

donc $4 < 1+x+x^2+x^3$

et

$$1 < x^3$$

$$x < x^3$$

$$x^2 < x^3$$

donc $1+x+x^2 < 3x^3$

donc $1+x+x^2+x^3 < 4x^3$

En rassemblant ces deux inégalités, on a :

Et comme $e^{-2x+1} > 0$ pour tout réel $x > 1$ alors :

$$4e^{-2x+1} < (1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1} < 4x^3e^{-2x+1}$$

$$4e^{-2x+1} < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$$

3) a) $\frac{4x^3e^{-2x+1}}{4x^3e^{-2x+1}} = \frac{4x^3e^{-2x} \times e}{\frac{8e}{2} x^3e^{-2x}} = \frac{e}{2} (2x)^3 e^{-2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ } donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^3 e^{-2x} = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ } donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x+1} = 0$

• $4e^{-2x+1} < f(x) < 4x^3e^{-2x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 1$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^3 e^{-2x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} (2x)^3 e^{-2x} = 0$ c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Interprétation graphique: La courbe C_f a l'axe (Ox) comme asymptote.

5) Posons $f(x) = v(x) e^{u(x)}$ avec $v(x) = 1+x+x^2+x^3$ $v'(x) = 1+2x+3x^2$
 $(e^u)' = u' e^u$ avec $u(x) = -2x+1$ et $u'(x) = -2$

Donc $f'(x) = v'(x) e^{u(x)} + v(x) u'(x) e^{u(x)}$
 $f'(x) = (1+2x+3x^2) e^{-2x+1} + (1+x+x^2+x^3)(-2) e^{-2x+1}$
 $f'(x) = (1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3) e^{-2x+1}$
 $f'(x) = (-1+x^2-2x^3) e^{-2x+1}$

6) On a $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$

On remarque que $f'(x) = g(x)e^{-2x+1}$ où g est la fonction étudiée dans la partie A.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-
signe de e^{-2x+1}	+	+	+
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f			

$f(\alpha) = 5$ à une unité près arrondie.

Exercice 3

1) a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(x) \leq 1 \\ 1 &\geq -\cos(x) \geq -1 \\ -1 &\leq -\cos(x) \leq 1 \\ 0 &\leq 1 - \cos(x) \leq 2 \\ \frac{0}{x} &\leq \frac{1 - \cos(x)}{x} \leq \frac{2}{x} \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{4}{x^2}\right) &= 5 \\ \lim_{X \rightarrow 5} \sqrt{X} &= \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}} = \sqrt{5}$$

$$\left. \begin{aligned} c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) &= 2 \\ \lim_{X \rightarrow 2} X^4 &= 16 \end{aligned} \right\} \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 = 16$$

$$\left. \begin{aligned} d) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 - x) &= 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x &= 0^+ \end{aligned} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2-x}{x} = +\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} &= +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} X &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}} = +\infty$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+1}{-2x+6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{-2x} = \frac{5}{2}$$

On en déduit que la courbe a une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{5}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-5x+1) &= -14 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-2x+6) &= 0^+ \end{aligned} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$$

On en déduit que la courbe a une asymptote verticale d'équation $x = 3$

$$3) \bullet \text{ Si } x < 0 \text{ alors } \left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} &= -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc par composition } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} k(x) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } x > 0 \text{ alors } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3x^2+5x) = 0 \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} k(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} k(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} k(x) = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$ Or $k(0) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = k(0)$
Donc k est continue en $x = 0$

Exercice 4

1) a) $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2} \times 2x - \sin(2x)$

$f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)$

b) $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$

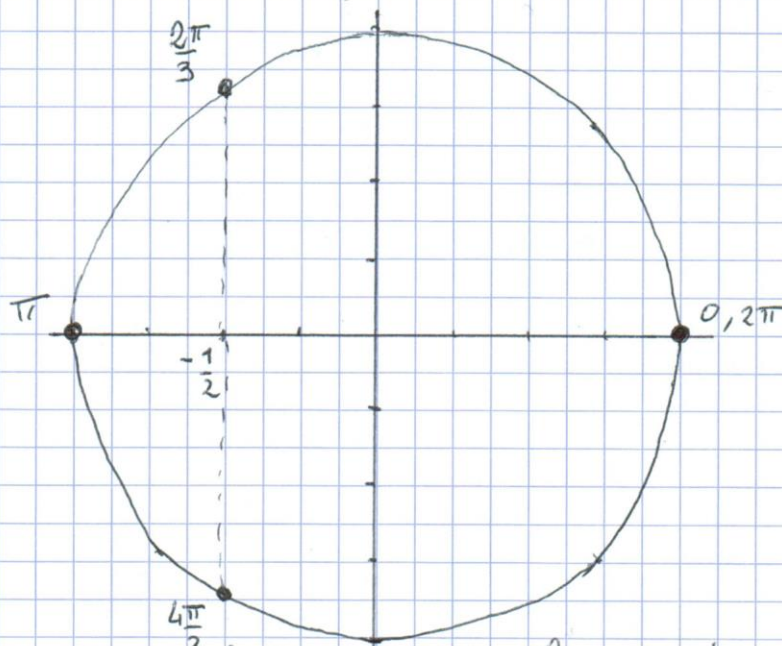
$f'(x) = -\sin(x) [1 + 2\cos(x)]$

2) Sur $[0; 2\pi]$:

$\sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0$

$\sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$

$\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = -\frac{1}{2}$



L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_{[0; 2\pi]} = \left\{ 0; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; 2\pi \right\}$

3) a)

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
signe de f'	0	-	0	+	0

b)

f	$2,5$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$2,5$
-----	-------	---------------	---------------	---------------	-------

Pour $x = \frac{2\pi}{3}$, on a $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}$

c) le minimum de la fonction est $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{4}$ est strictement positif. Donc f est strictement positive sur $[0; 2\pi]$.

