BACCALAURÉAT BLANC

DATE : Mars 2020

MATHÉMATIQUES – Terminale 4-5-6-7 série S

Durée : 4 heures

SUJET

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche en mode examen ou calculatrices de type collège sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

<u>Une seule calculatrice par élève peut être utilisée pendant le devoir</u>.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Dans chaque exercice, l'élève peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L. Beaussart / S. Blondeau / B. Paviot / C. Raimbault

<u>EXERCICE 1</u> **(A faire uniquement par les élèves <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de Spécialité) 5 points**

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

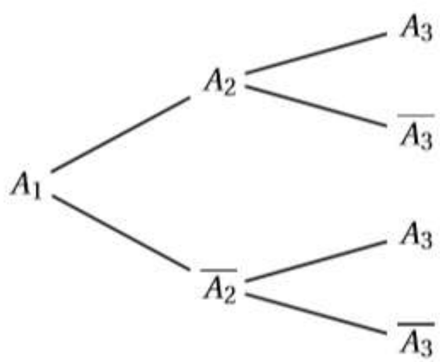
- Parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante.
- Parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour n $\geq$ 1, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

   b. Démontrer que $p(A_3) = 0{,}85$.

   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1 :\ p_n = p(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1 :\ p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1 : p_n > 0{,}8$

   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geq 1 :\ v_n = p_n - 0{,}8$

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme $v_1$et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier $n \geq 1 :\ p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$

   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

<u>EXERCICE 1bis</u> **(Uniquement pour les élèves <u>qui suivent l'enseignement de Spécialité</u>)** **5 points**

On note *r* l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes, à coefficients entiers.

Soit U = $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$et V = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de *r*. À U et V, on associe la matrice A = $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ et le nombre d(A) = $u_1v_2 - u_2v_1$.

On dit que (U ; V) est une base de *r* si et seulement si, pour tout élément X de *r,* il existe un unique coupe d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tel que X = aU + bV.

1) Dans cette question, on pose U = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et V = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. et X = $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que X ne peut pas s'écrire X = aU + bV, avec a et b entiers relatifs.
   b) Le couple (U ; V) est-il une base de *r* ?

Dans la suite de l'exercice, on souhaite illustrer sur un exemple la propriété :
« si d(A) = 1, alors (U ; V) est une base de r ».

2) En posant U = $\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ le but de cette question est de déterminer V = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ telle que d(A)=1.

   On rappelle dans ce cas que la matrice A associée au couple (U ; V) s'écrit : A = $\begin{pmatrix} 6 & v_1 \\ -11 & v_2 \end{pmatrix}$.

   a) Exprimer la condition d(A) = 1 par une égalité reliant v_1 et v_2.
   b) On considère l'équation (E) : *11x + 6y = 1*, où *x* et *y* sont entiers relatifs.
      Donner une solution particulière de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des entiers relatifs.
   d) Déterminer alors une matrice V = $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de *r* vérifiant d'une part l'égalité d(A) = 1 et, d'autre part, la condition $0 \leq v_1 \leq 10$.

3) Dans cette question, on pose U = $\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \end{pmatrix}$ et V = $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Ainsi A = $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -9 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.
   b) Soit X un élément de *r.*
      Montrer que l'égalité X = aU + bV s'écrit matriciellement X = A$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   c) Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(a\ ;\ b)$ tel que X = aU + bV, c'est à dire tel que (U ; V) est une base de *r*.
   d) Déterminer ce couple $(a\ ;\ b)$ lorsque X = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2 (Commun à tous les élèves) **5 points**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_2(x) = (x + 2)e^{-x}$$

La courbe représentative de f_2, notée C_2, est tracée dans un repère orthonormé sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.

Aucune justification ni aucun calcul ne sont attendus dans cette partie.

1. Conjecturer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Conjecturer le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique.
3. Soit T_2 la tangente à la courbe C_2, au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur l'ANNEXE à rendre avec la copie, puis en conjecturer une équation par lecture graphique.

Partie B

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = (x + m)e^{-x}$$

et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'_m sa dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'_m(x) = (-x - m + 1)e^{-x}$.
3. En déduire les variations de f_m sur $\mathbb{R}$.
4. a. Pour tout réel m, on note T_m la tangente à la courbe C_m au point d'abscisse 0.
   Démontrer que T_m a pour équation réduite : $y = (1 - m)x + m$.
   b. Démontrer que toutes les droites T_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
5. Étudier le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x.

EXERCICE 3 **(Commun à tous les élèves)** **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans C l'équation $(z^2-2z+4)(z^2+4)=0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$ et $z_B\ =2i$.
   a. Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b. Faire une figure et placer les points A et B
   c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.
3. On note F le point d'affixe $z_F\ =z_A+z_B$.
   a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)$ puis de l'angle$\left(\vec{u},\overrightarrow{OF}\right)$.
   c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   d. En déduire la valeur exacte de :

$$cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

   et pour l'autre :

$$cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

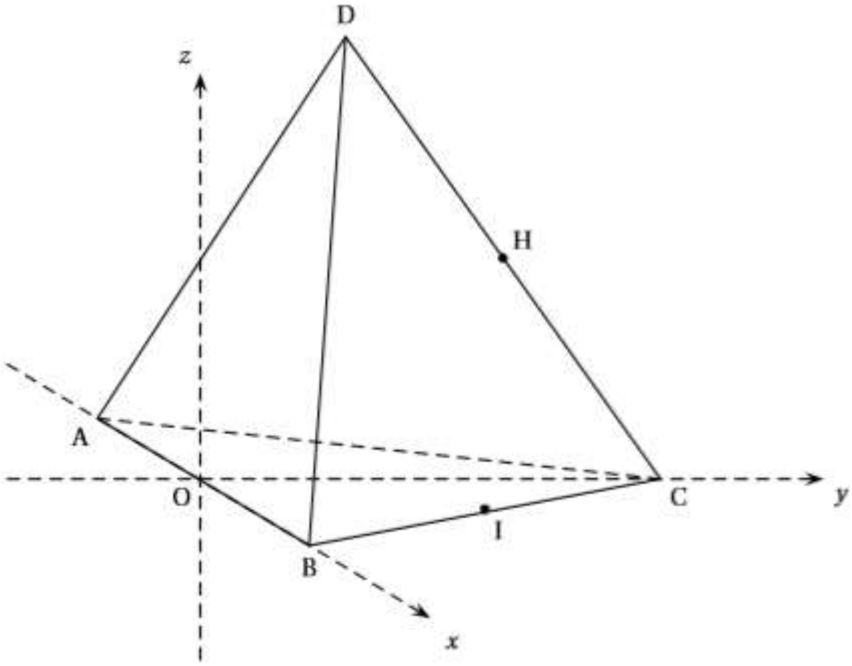
   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **(Commun à tous les élèves)** **5 points**

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes $(Ox), (Oy) et\ (Oz)$.

Dans ce repère, on donne les points $A(-3;\ 0;\ 0), B(3; 0;\ 0), C\left(0;\ 3\sqrt{3}; 0\right) et\ D\left(0\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{6}\right)$.

On note H le milieu du segment $[CD]$ et I le milieu du segment $[BC]$.



1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.

On appelle *P* le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan *P*.
   a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan *P* est : $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$
   b. Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan *P* .
   c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan *P* et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   d. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
   e. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan P .
3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

Numéro d'anonymat : ……………………………………………………………..

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2