

Ancien Devoir Surveillé

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,9 u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer u_1 et u_2 .
b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
c) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier.
- 2) On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = u_n - 900$.
a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
b) Peut-on conclure à partir de ces trois valeurs que la suite (v_n) est arithmétique ou géométrique ? Justifier.
- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,9 v_n$.
b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? préciser son premier terme et sa raison.
c) Ecrire l'expression de v_n en fonction de n .
- 4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 5) a) Ecrire un algorithme en langage naturel qui affiche la valeur du premier entier naturel k tel que $u_k \leq 901$.
b) Donner la valeur de k .

EXERCICE 4 :

Une compagnie pétrolière dispose d'une somme de 49 millions d'euros pour réaliser un forage en pleine mer. Le coût du forage est estimé de la façon suivante :

- Cent mille euros pour les dix premiers mètres ;
- Trois cent mille euros pour les dix mètres suivants ;
- Cinq cent mille euros pour les dix mètres suivants et ainsi de suite, le coût de chaque dizaine de mètres augmentant de deux cent mille euros par rapport au coût précédent.

On pose $C_0 = 1$, $C_1 = 3$, $C_2 = 5$. Plus généralement, on note C_n le coût exprimé en centaines de milliers d'euros de la $(n + 1)$ - ième dizaine de mètres creusés.

- 1) a) Calculer C_6 .
b) Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.
c) Pour tout entier naturel n , exprimer C_n en fonction de n .
- 2) a) Calculer $S_{10} = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{10}$.
b) Que représente cette somme ?
- 3) On note pour tout entier naturel n , $S_n = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $S_n = (n + 1)^2$.
- 4) En tenant compte des moyens financiers dont dispose la compagnie, calculer la profondeur maximale du puits de forage.

EXERCICE 5 :

Démontrer par récurrence que les propositions suivantes sont vraies.

- 1) Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{11} \\ u_{n+1} = 100u_n - 63 \end{cases}$$

Proposition : $u_n = \frac{7}{11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2) Proposition : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- 3) Proposition : $n \times (n - 1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.