Construction sur l'axe des abscisses des premiers termes d'une suite récurrente

Math'x p111

Objectif BAC

Étudier la monotonie et la convergence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Énoncé D'après BAC (2010)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

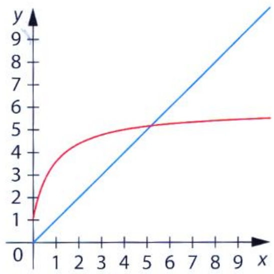
Le but de cet exercice est d'étudier les suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

1 Étude de la suite pour $u_0 = 0$.

a. Sur le graphique ci-contre sont représentées les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = x$. Construire les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée 0 et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?



b. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Analyse de l'énoncé

L'exercice porte sur l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

On reconnaît une question 1. très classique : construction des premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses puis démonstration par récurrence du fait que la suite est croissante et bornée. C'est une méthode souvent utilisée pour prouver qu'une telle suite converge.

La question 2. est une question ouverte. Le graphique aide à conjecturer.

On pourra essayer d'adapter la démonstration de la question 1.b. pour démontrer ces conjectures.

2 *Dans cette question, toute trace d'argumentation même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

Aides

■ **1.** Dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ revient à dire que (u_n) est croissante et bornée.

■ **2.** Graphiquement, on se rend compte qu'il faut distinguer les cas selon la position de u_0 par rapport à α. On peut chercher à montrer à nouveau par récurrence que la suite est croissante majorée ou décroissante minorée pour prouver qu'elle converge.

Éléments de réponse

1. a. (u_n) semble croissante et convergente vers α.

b. Pour $n = 0$, on a $0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant u_1 = 1 \leqslant \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, par croissance de f, sur $[0\,;+\infty[$, $f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(\alpha)$ avec $f(0) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$. D'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

(u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une limite ℓ. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ pour tout n, on en déduit que $0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$.

Par théorèmes d'opérations et unicité de la limite de (u_{n+1}), on montre que $f(\ell) = \ell$, avec $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = \alpha$.

2. Pour $u_0 = \alpha$:
comme $f(\alpha) = \alpha$ la suite est constante égale à α donc converge.

Pour $0 \leqslant u_0 < \alpha$:
la suite est croissante et majorée donc convergente. On montre que $u_0 < u_1$ puis par récurrence comme dans la question 2. que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

Pour $u_0 > \alpha$:
la suite est décroissante et minorée, donc convergente. On montre que $u_0 > u_1$ puis par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.