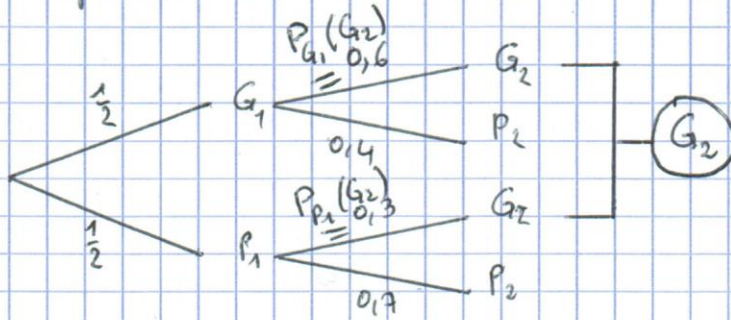
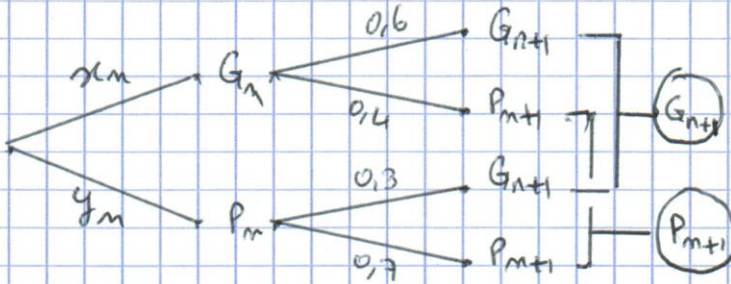


Dans ce type d'exercice, où l'on a des suites d'épreuves, on fait un premier arbre à deux niveaux (pour les étapes 1 et 2)



et on fait un deuxième arbre à deux niveaux (pour les étapes n et n+1)



- 1) a) D'après les informations de l'énoncé, $P(G_1) = \frac{1}{2}$, $P_{G_1}(G_2) = 0.6$
 $P_{P_1}(G_2) = 0.3$

- b) D'après la formule des probabilités totales, $P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(P_1 \cap G_2)$

$$P(G_2) = \frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3 \quad \underline{P(G_2) = 0.45}$$

P_2 est l'événement contraire de G_2 donc $P(P_2) = 1 - P(G_2)$
 $\underline{P(P_2) = 0.55}$

- 2) a) D'après les informations de l'énoncé, $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0.6$, $P_{G_n}(P_{n+1}) = 0.4$

- b) D'après la formule des probabilités totales, $P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(P_n \cap G_{n+1})$

$$\underline{P(G_{n+1}) = 0.6x_n + 0.3y_n}$$

P_{n+1} est calculé aussi par la formule des probabilités totales

$$P(P_{n+1}) = P(G_n \cap P_{n+1}) + P(P_n \cap P_{n+1}) = \underline{0.4x_n + 0.7y_n}$$

- 3) a) Variables: n entier # rang à demander à l'utilisateur
 x, y réels
 i entier # variable de boucle
 t entier # stockage temporaire de x

Demande n

x prend la valeur 0.5

y prend la valeur 0.5

Pour i allant de 2 à n

t prend la valeur x

x prend la valeur $0.6x + 0.3y$

y prend la valeur $0.4t + 0.7y$

Fin Pour

Afficher x, y (1)

b) L'algorithme affiche pour la première fois une valeur $x < 0,43$ pour $n=5$

		x	y
c) Pour	$n=10$	0,429	0,571
	$n=20$	0,429	0,571
	$n=30$	0,429	0,571

Il semble que les suites (x_n) et (y_n) convergent.

d) On choisit par exemple $\begin{cases} x_1 = 0,1 \\ y_1 = 0,9 \end{cases}$

On modifie le début de l'algorithme : x prend la valeur 0,1
 y prend la valeur 0,9

		x	y
Pour	$n=10$	0,429	0,571
	$n=20$	0,429	0,571
	$n=30$	0,429	0,571

Il semble que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite quelles que soient les valeurs des premiers termes x_1 et y_1 dans $[0,1]$ et telles que $y_1 = 1 - x_1$

4) a)

$$V_n = x_n + y_n$$

$$V_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$$

$$V_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n$$

$$V_{n+1} = x_n + y_n$$

$$V_{n+1} = V_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^+ \text{ Donc } (V_n) \text{ est constante de valeur } V_1 = x_1 + y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b)

$$W_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1}$$

$$W_{n+1} = 4(0,6x_n + 0,3y_n) - 3(0,4x_n + 0,7y_n)$$

$$W_{n+1} = 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n$$

$$W_{n+1} = 1,2x_n - 0,9y_n$$

$$W_{n+1} = \frac{1,2}{4} 4x_n - \frac{0,9}{3} 3y_n \quad (\text{l'idée est de faire apparaître } 4x_n - 3y_n)$$

$$W_{n+1} = 0,3[4x_n - 3y_n]$$

$$W_{n+1} = 0,3 W_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^+$$

Conclusion :

la suite (W_n) est géométrique

$\begin{cases} \text{de 1er terme } W_1 = 4x_1 - 3y_1 \\ W_1 = \frac{1}{2} \\ \text{de raison } q = 0,3 \end{cases}$

$$\text{Ainsi } W_n = W_1 \times q^{n-1} \quad W_n = \frac{1}{2} \times 0,3^{n-1}$$

5) a)

$$\begin{cases} V_n = x_n + y_n \\ W_n = 4x_n - 3y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_n = 3x_n + 3y_n \\ W_n = 4x_n - 3y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_n + W_n = 7x_n \\ W_n - 4x_n = -3y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = (3V_n + W_n) / 7 \\ 3y_n = -W_n + (4/7)(3V_n + W_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = (3V_n + W_n) / 7 \\ 3y_n = (12/7)V_n - (3/7)W_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = (3/7)V_n + (1/7)W_n \\ y_n = (4/7)V_n - (1/7)W_n \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_n = 3/7 + (1/7)(1/2)0,3^{n-1} \\ y_n = 4/7 - (1/7)(1/2)0,3^{n-1} \end{cases}$$

b) $-1 < 0,3 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^{n-1} = 0$ d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3/7$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 4/7$ $(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ convergent}$ (2)