

# Sujet C p127

## Partie A Existence et unicité de la solution

1) les propositions suivantes sont équivalentes:

- \*  $e^x = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$
- \*  $x = \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$
- \*  $x = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$
- \*  $x - e^{-x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$
- \*  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$

2) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - (e^{u(x)})' \text{ avec } u(x) = -x \quad u'(x) = -1 \\ f'(x) &= 1 - (-e^{-x}) \\ f'(x) &= 1 + e^{-x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \end{aligned} \right\} & \text{donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ & \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{aligned} \left. \right\} \begin{aligned} & \text{donc par somme} \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned} \left. \right\} \begin{aligned} & \text{donc par somme} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

- $f$  est continue sur  $] -\infty; +\infty[$
  - $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; +\infty[$
  - $0 \in ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$
- donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(1) &= 1 - e^{-1} \approx 0,63 & f(1) > 0 \\ f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,11 & f(\frac{1}{2}) < 0 \end{aligned} \right\} & \text{donc } 0 \in ] f(\frac{1}{2}); f(1) [ \\ & \text{et donc } \alpha \in ] \frac{1}{2}; 1 [ \end{aligned}$$

d)  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; +\infty[$  et  $f(\alpha) = 0$ , donc  $f$  est strictement négative sur  $[0; \alpha[$  et s'annule pour  $x = \alpha$ .



## Partie B Deuxième approche

1) Les propositions suivantes sont équivalentes:  $\forall x \in [0, 1]$

\*  $g(x) = x$

\*  $\frac{1+x}{1+e^x} = x$  (on a  $1+e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ )

\*  $1+x = x(1+e^x)$

\*  $1+x = x + xe^x$

\*  $1 - xe^x = 0$

\*  $e^x \left( \frac{1}{e^x} - x \right) = 0$

\*  $e^x (e^{-x} - x) = 0$

\*  $\frac{e^x (e^{-x} - x)}{e^x} = \frac{0}{e^x}$

\*  $e^{-x} - x = 0$

\*  $-e^{-x} + x = 0$

\*  $f(x) = 0$

2) D'après la question précédente,  $g(x) = x$  équivaut à  $f(x) = 0$  donc, puisque  $\alpha$  est la solution de  $f(x) = 0$  et  $\alpha \in [0, 1]$  (cf. la question A) 2) b)) alors on a  $f(\alpha) = 0$  et donc  $g(\alpha) = \alpha$ .

3)  $g$  est dérivable sur  $[0, 1]$  comme quotient de fonctions dérivables sur  $[0, 1]$

$g = \frac{u}{v}$  avec  $u(x) = 1+x$   $u'(x) = 1$   
 $v(x) = 1+e^x$   $v'(x) = e^x$

$g'(x) = \frac{1+e^x - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2}$

$g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$

$\forall x \in [0, 1], (1+e^x)^2 > 0$  donc le signe de  $g'(x)$  est le même que le signe de  $1 - xe^x$

$1 - xe^x = e^x \left( \frac{1}{e^x} - x \right)$

$1 - xe^x = e^x (e^{-x} - x)$

$1 - xe^x = -e^x (-e^{-x} + x)$

$1 - xe^x = -e^x (x - e^{-x})$

$1 - xe^x = -e^x f(x)$

$\forall x \in [0, \alpha], f(x) \leq 0$  (d'après la question A) 2) d))  
 $\forall x \in [\alpha, 1], f(x) \geq 0$

| $x$               | 0 | $\alpha$ | 1 |
|-------------------|---|----------|---|
| signe de $-e^x$   | - | -        | - |
| signe de $f(x)$   | - | 0        | + |
| signe de $g'(x)$  | + |          | - |
| variations de $g$ |   |          |   |

$g(0) = \frac{1+0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$

$g(1) = \frac{1+1}{1+e} = \frac{2}{1+e} \approx 0,7$



Partie C Construction d'une suite de réels ayant pour limite  $\alpha$ .

1) •  $u_0 = 0$        $u_1 = g(u_0)$        $u_1 = g(0)$        $u_1 = \frac{1}{2}$

On a vu à la question A) 2) c) que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ .  
donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$

la proposition est donc vraie pour  $n=0$

• Hérité:

Supposons qu'il existe un entier naturel  $k$  tel que  
 $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

$$g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha) \quad \text{car } g \text{ est croissante sur } [0; \alpha]$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$$

$$\text{donc } 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$$

la proposition est héréditaire.

• Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

2) la suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée par  $\alpha$   
donc elle converge. (d'après le théorème de la convergence des suites monotones).

3) a) Pour calculer  $u_4$ , on utilise une boucle Pour

$$U \leftarrow 0 \quad \# \text{ initialisation}$$

$$N \leftarrow 0$$

Pour  $i$  allant de 1 à 4:

$$U \leftarrow g(U)$$

$$N \leftarrow N+1$$

$$\text{avec } g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

b) On programme cet algorithme et on obtient

$$u_4 = 0,567143$$