Sujet E p128

Sujet E

1. On peut conjecturer que la fonction est croissante sur $[-3 ; 2]$.

2. On a $f'(x) = 2x\,e^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x\,g(x)$.

3. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

b. On obtient $g'(x) = (x+3)e^{x-1}$.

$g'(x)$ a même signe que $x + 3$. Donc $g'(x) < 0$ pour $x < -3$ et $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant -3$.

c. La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3]$ et strictement croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
g	-1 ↘	$-e^{-4} - 1$	↗ $+\infty$

d. Sur $]-\infty ; -3]$, $g(x) < 0$.

Sur $[-3 ; +\infty[$, g est continue et strictement croissante.

De plus $g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3 ; +\infty[$ et donc dans $\mathbb{R}$.

On remarque que $g(0{,}2) < 0$ car $g(0{,}2) \approx -0{,}011$ et $g(0{,}21) > 0$ car $g(0{,}21) \approx 0{,}003$.

On en déduit que $0{,}2 < \alpha < 0{,}21$.

e. Sur $]-\infty ; \alpha[$: $g(x) < 0$, et sur $]\alpha ; +\infty[$: $g(x) > 0$ avec $g(\alpha) = 0$.

4. a. $f'(x) = x\,g(x)$. Donc $f'(x)$ est un produit de deux facteurs :

$f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[\alpha ; +\infty[$; $f'(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$.

b. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[\alpha ; +\infty[$ et elle est décroissante sur $]0 ; \alpha[$.

c. La conjecture est erronée.