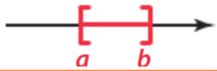
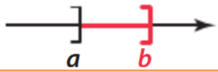
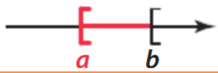
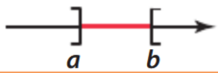
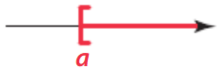
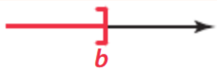
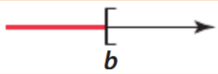
Chapitre 4 : Intervalle et inéquations

Chapitre 4 : Intervalles et inéquations

1 Intervalles de $\mathbb{R}$

1.1 Rappel

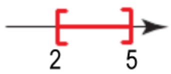
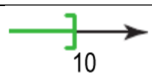
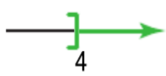
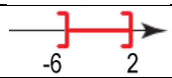
L'ensemble des nombres réels compris entre a inclus et b inclus est appelé **intervalle** et se note $[a\,;b]$.
a et b sont les bornes de l'intervalle.

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty; b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se lisent "moins l'infini" et "plus l'infini". Ce ne sont pas des nombres. Le crochet est toujours vers l'extérieur en $-\infty$ et en $+\infty$.
- L'ensemble des réels positifs est $[0\,;\,+\infty[$. Il se note $\mathbb{R}^+$.
- L'ensemble des réels négatifs est $]-\infty\,;0]$. Il se note $\mathbb{R}^-$.

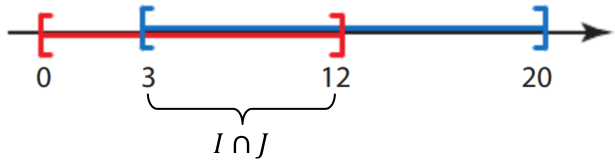
Exemples

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 5$	x est compris entre 2 inclus et 5 inclus.	$x \in [2\,;5]$	
$x \leq 10$	x est inférieur ou égal à 10.	$x \in]-\infty\,;10]$	
$x > 4$	x est strictement supérieur à 4.	$x \in]4\,;+\infty[$	
$-6 < x \leq 2$	x est compris entre -6 exclu et 2 inclus.	$x \in]-6\,;2]$	

1.2 Intersection et réunion de deux intervalles

- **L'intersection** de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cap J}$ qui contient les nombres qui appartiennent à la fois à I **et** à J.

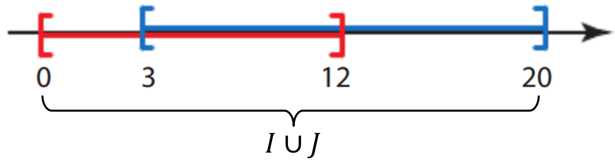
Exemple : En prenant $I = [0\,;12]$ et $J = [3\,;20]$, l'intersection de I et de J est l'intervalle $[3\,;12]$.



L'intersection correspond à la partie de la droite coloriée en rouge et en bleu.

- **La réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cup J}$ qui contient les nombres qui appartiennent à I **ou** à J (ou les deux).

Exemple : En prenant $I = [0\,;12]$ et $J = [3\,;20]$, la réunion de I et de J est l'intervalle $[0\,;20]$.



La réunion correspond à la partie de la droite coloriée en rouge ou en bleu ou dans les deux couleurs.

2 Manipuler les inégalités

2.1 Additionner et soustraire un nombre à une inégalité

a, b, c et k sont des nombres réels.

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres conserve l'ordre de l'inégalité.

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$

2.2 Multiplier et diviser une inégalité par un nombre

Multiplier ou diviser par un même nombre **positif** les deux membres **conserve** l'ordre de l'inégalité.

- Si $a < b$ et si $k > 0$ alors $a \times k < b \times k$
- Si $a < b$ alors $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$

Multiplier ou diviser par un même nombre **négatif** les deux membres d'une inégalité **change** l'ordre.

- Si $a < b$ et si $k < 0$ alors $a \times k > b \times k$
- Si $a < b$ alors $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$

Exemple : $2 < 4$ donc $-5 \times 2 > -5 \times 4$; De façon générale si $a < b$ alors $-5a > -5b$.

2.3 Somme d'inégalités

a, b, c et d sont des nombres réels.

- Si $a < b$ et si $c < d$ alors $a + c < b + d$

3 Résoudre des inéquations du premier degré

3.1 Inéquations

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue.

Résoudre l'inéquation, c'est chercher toutes les valeurs de l'inconnue telles que l'inégalité est vraie.

Une inéquation est du premier degré lorsque la plus forte puissance de l'inconnue est 1.

Exemples

$3x + 4 < 7x + 9$ et $2x + 6 \geq x - 5$ sont des inéquations du premier degré.

3.2 Méthode pour résoudre une inéquation

On procède par équivalences en utilisant les règles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division par un nombre.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x + 2 \geq 8$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$-3x + 2 \geq 8$$

$$-3x \geq 6$$

$$x \leq \frac{6}{-3}$$

$$x \leq -2$$

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty\ ;\ -2]$.

3.3 Modéliser

Modéliser un problème par une inéquation, c'est écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposée par le problème.

Exemple : L'inscription dans un club de kayak coûte 22 € et la location d'un kayak coûte 2,80 € par heure. Combien d'heures de kayak peut-on faire avec un budget de 120 € ?

Réponse : Soit x le nombre d'heures. Il faut que $22 + 2{,}80x \leq 120$.

4 Valeur absolue d'un nombre réel

4.1 Valeur absolue d'un réel x et distance

La valeur absolue d'un nombre x est sa valeur, sans considérer le signe.

Une valeur absolue est toujours positive.

La valeur absolue de x se note entre deux barres verticales.

$|x|$ se lit "valeur absolue de x".

Exemples

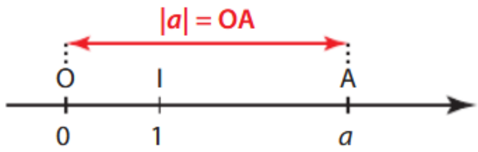
La valeur absolue de 3 est égale à 3. On écrit $|3| = 3$.

La valeur absolue de -3 est égale à 3. On écrit $|-3| = 3$.

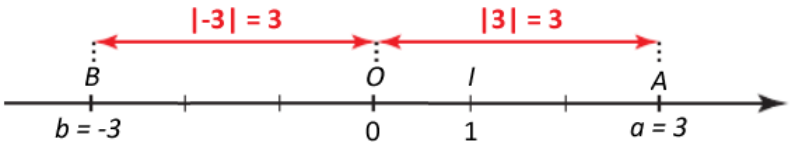
Distance

Sur une droite gradué munie d'une origine O, on considère les points A et B d'abscisses a et b.

La valeur absolue de a, notée $|a|$ est le nombre égal à la distance OA.



- Il y a deux positions qui correspondent à une valeur absolue égale à 3.



4.2 Valeur absolue de x selon le signe de x

- Si x est un nombre positif alors sa valeur absolue est égale à lui-même. $|x| = x$.

Exemple

Si $x = 3$ alors $|x| = x = 3$

- Si x est un nombre négatif alors sa valeur absolue est égale à son opposé. $|x| = -x$.

Exemple

Si $x = -3$ alors $|x| = -x = -(-3)$ ce qui donne $|x| = 3$

On remarque que si x représente un nombre négatif alors **<u>$-x$ est positif.</u>**

4.3 Écriture de la valeur absolue de x avec une racine carrée

Pour tout nombre réel positif a, $\sqrt{a^2} = a$.

Pour tout nombre réel négatif a, $\sqrt{a^2} = -a$.

Exemples

Si $a = 4$ alors $\sqrt{a^2} = \sqrt{4^2}$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{16}$

$\sqrt{a^2} = 4$

On a bien $\sqrt{a^2} = a$

Si $a = -5$ alors $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-5)^2}$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{25}$

$\sqrt{a^2} = 5$

$\sqrt{a^2} = -(-5)$

On a bien $\sqrt{a^2} = -a$

Conclusion

Ces règles sont exactement les mêmes que pour la valeur absolue

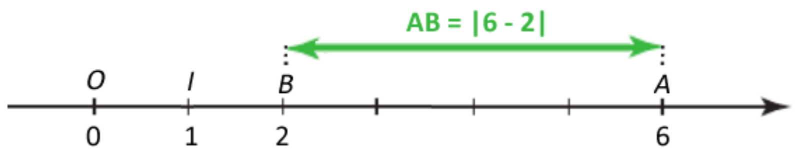
Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

4.4 La distance entre deux réels x et y

Sur une droite gradué munie d'une origine O, on considère les points M et N d'abscisses x et y.

La valeur absolue de $x - y$, notée $|x - y|$ **est le nombre égal à la distance** MN.

Exemple



Remarque

Pour tous réels x et y on a $|x - y| = |y - x|$.

4.5 Inéquation de la forme $|x-a| \leq r$

a est un réel.

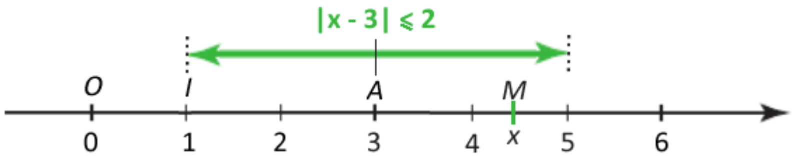
r est un réel positif.

Exemple

$$|x-3| \leq 2$$

Pour résoudre cette inéquation, on peut s'aider de l'interprétation de la valeur absolue d'une différence comme distance entre deux points.

Soit M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse $a = 3$.



Où peut être le point M pour que sa distance au point A soit inférieure ou égale à 2 ?

Réponse

Toutes les valeurs de x comprises ente 1 inclus et 5 inclus conviennent.

Donc l'ensemble des solutions est $S = [1 ; 5]$.

On retient :

$\lvert x-a\rvert \leq r$ équivaut à $x \in [a-r\ ;\ a+r]$.

Dans ce cas a est appelé centre de l'intervalle et r rayon de l'intervalle.