Chapitre 5 : Fonctions de référence

Chapitre 5 : Fonctions de référence

1 Notion de fonction, ensemble de définition, calcul d'images et d'antécédents

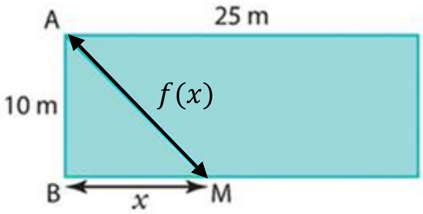
Définition

Soit D un ensemble de nombres réels, par exemple un intervalle.

Définir une fonction f sur D, c'est associer à chaque réel x de D un réel et un seul, appelé image de x par la fonction f.

D est l'ensemble de définition de la fonction : c'est l'ensemble des réels pour lesquels il existe une image.

Exemple



Une piscine rectangulaire a pour dimensions 25 m sur 10 m. Alice se situe au point A et elle veut rejoindre l'autre côté de la piscine en ligne droite à la nage. Elle touche le bord en face au point M.

On note x la distance BM. Alice nage sur la distance AM. La distance AM est fonction de x.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour la variable x ?
2) Justifier que la distance AM est donnée par la formule $f(x) = \sqrt{x^2 + 100}$.

Réponse

1) x est une distance donc $x \geq 0$. De plus la piscine mesure 25m de long donc $x \leq 25$.

D'où $x \in [0\,;25]$. C'est **l'ensemble de définition** de la fonction f.

2) Dans le triangle ABM rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AB^2 + BM^2$

$$AM^2 = 10^2 + x^2$$

$$AM = \sqrt{10^2 + x^2}$$

Donc Alice nage sur la distance $AM = f(x)$.

$$f(x) = \sqrt{10^2 + x^2}$$

$f(x) = \sqrt{10^2 + x^2}$ est **l'expression** de la fonction f.

Par exemple si Alice veut atteindre le point M situé à $x = 9$ m du point B elle doit nager sur $f(9) = \sqrt{10^2 + 9^2} \approx 13{,}45$ m.

Vocabulaire :

- $\sqrt{181}$ est **l'image** de $x = 9$ par la fonction f.

On symbolise quelque fois une fonction par une flèche avec un taquet :

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{10^2 + x^2}$$

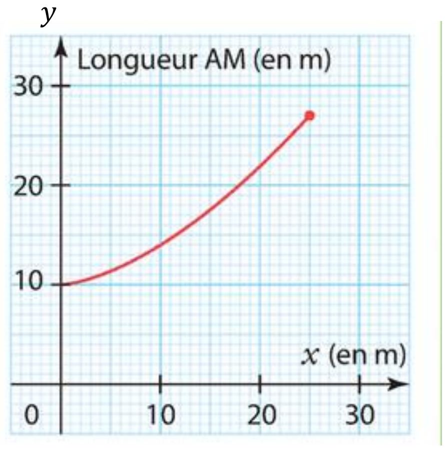
et dans notre exemple on a :

$$9 \mapsto f(x) = \sqrt{181}$$

- 9 est **l'antécédent** de $\sqrt{181}$ par la fonction f.

2 Étude graphique d'une fonction, lecture d'images et d'antécédents

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f précédente.



1) Où se lit l'ensemble de définition de la fonction f sur le graphique ? Le tracer en vert sur le graphique.

2) Les trois affirmations suivantes d'Alice sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

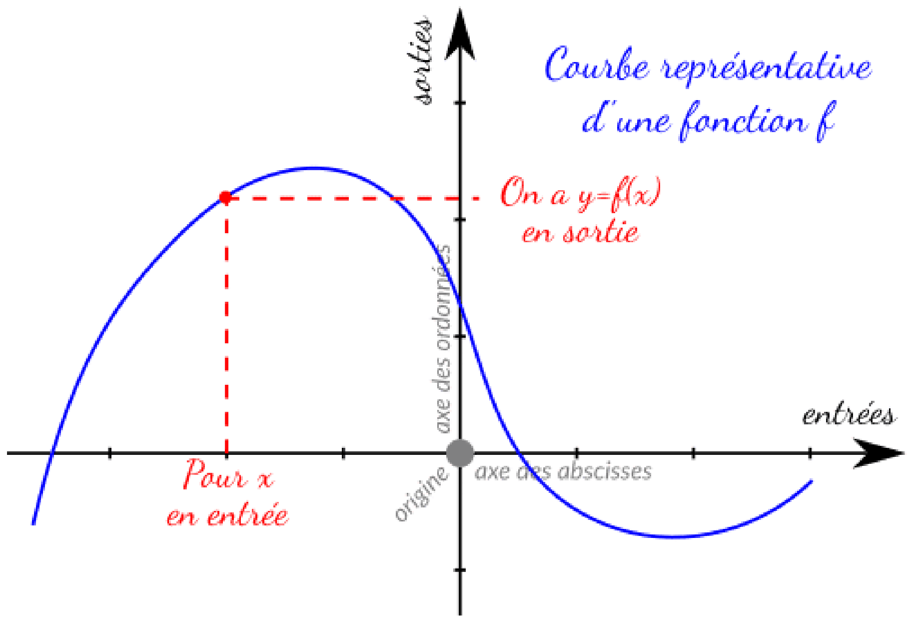
- Affirmation 1 : « Si $x = 10$, je parcours environ 14 m et l'image de 10 est 14 »

- Affirmation 2 : « Si $x \in [15 ; 25]$, je suis sûre de parcourir plus de 15 mètres.

- Affirmation 3 : « Il n'y a aucune valeur de x pour laquelle je peux parcourir 25 mètres ».

3) Lire l'image de 5 et donner l'écriture symbolique de la réponse.

4) Lire l'antécédent de 15 et donner l'écriture symbolique de la réponse.



$\boldsymbol{x}$: entrée, **abscisse**, antécédent

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: sortie, **ordonnée**, image

- Si on demande de lire l'image de -2 alors on part de -2 sur l'axe des abscisses. Par un déplacement vertical on atteint la courbe puis par un déplacement horizontal **on lit l'image sur l'axe des ordonnées.**
- Si on demande de lire les antécédents de 2,2 alors part de 2,2 sur l'axe des ordonnées. Par un déplacement horizontal on atteint la courbe ici deux fois et par un déplacement vertical **on lit les antécédents sur l'axe des abscisses.**

3 Étude de la courbe de la fonction f

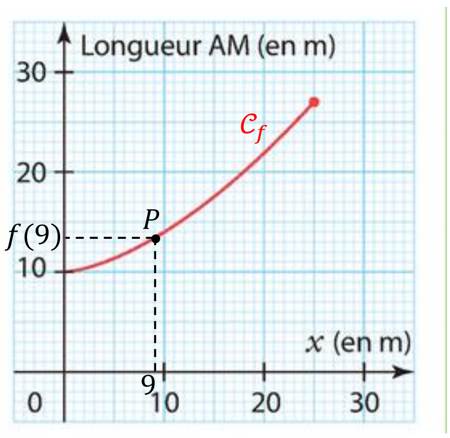
La courbe qui représente la fonction f a pour équation

$$y = f(x)$$

Donc dans l'exemple d'Alice, l'équation de la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre qui représente la fonction f a pour équation :

$$y = \sqrt{x^2 + 100}$$

Par exemple si un point P du plan a une abscisse $x = 9$ et qu'il est sur la courbe, alors son ordonnée y est égale à $f(9)$.



On voit graphiquement que si Alice veut arriver à 9 m du point B de la piscine alors elle doit nager sur environ 13,5 m.

Question : Le point de coordonnées (24 ; 26) est -il sur la courbe $\mathcal{C}_f$?

Réponse : On calcule l'image de 24. $f(24) = \sqrt{24^2 + 100} = \sqrt{676} = 26$. Donc oui.

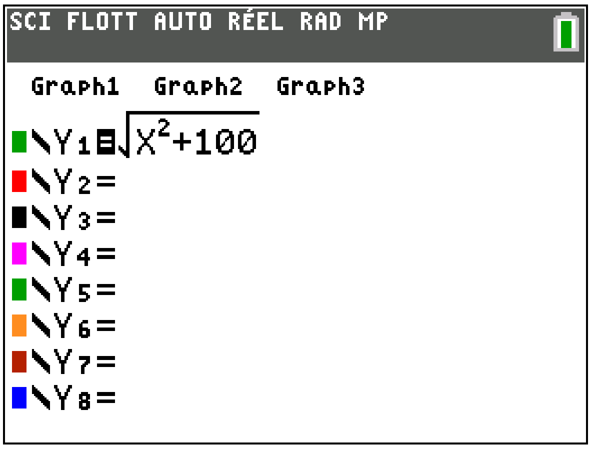
4 Utilisation de la calculatrice pour avoir la table des valeurs et le graphique

4.1 Table des valeurs

Le protocole suivant donne les images par la fonction f pour des entiers naturels de 0 à 25.

- Appuyez sur la touche **f(x).**
- Saisissez l'expression de la fonction.

  X est obtenu avec la touche X,T,θ, n



- Entrez les caractéristiques de x pour le tableau en choisissant **2**

DébutTbl correspond à la plus petite valeur de x.

ΔTbl correspond au pas (c'est à dire l'espacement des valeurs de x entre elles).

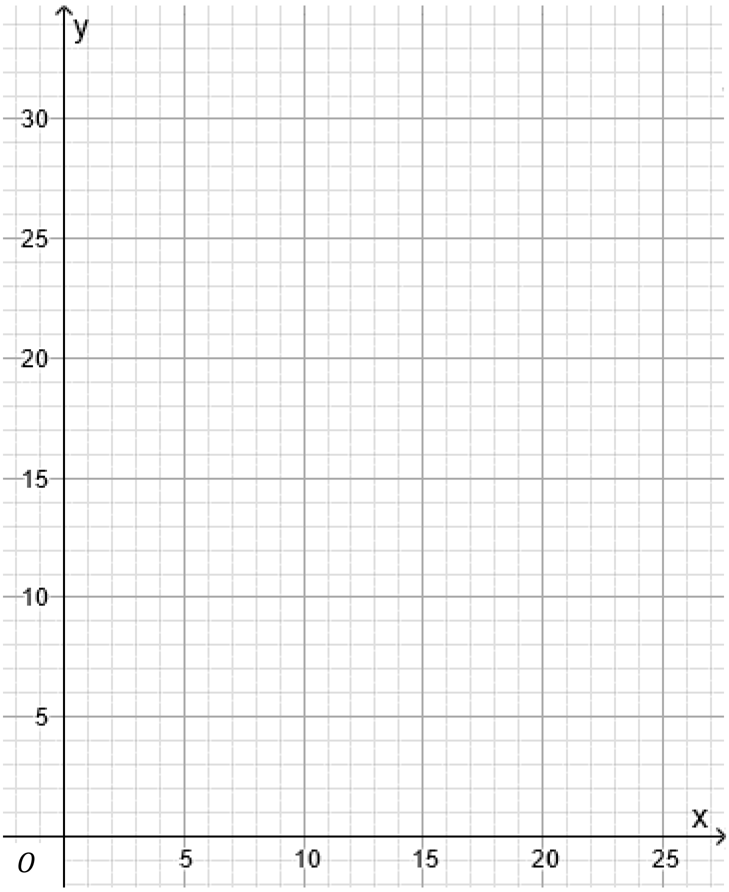
- Appuyez sur **2nd table** et complétez le tableau de valeurs ci-contre.

x	$f(x)$ arrondies à 10^{-2} près
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	
22	
24	
25	

4.2 Représentation de la courbe point par point

- Du tableau précédent on déduit les points à placer dans le repère pour tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

- Sur le repère de la page suivante, placez les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ en prenant chacune des colonnes du tableau de valeurs.



4.3 Représentation de la courbe sur l'écran de la calculatrice

- Appuyez sur la touche **f(x).**
- Saisissez l'expression de la fonction.
- Appuyez sur la touche **fenêtre.** Réglez les dimensions de la fenêtre graphique. On choisit les valeurs minimales et maximales de x :

  Xmin = 0 et Xmax = 25.

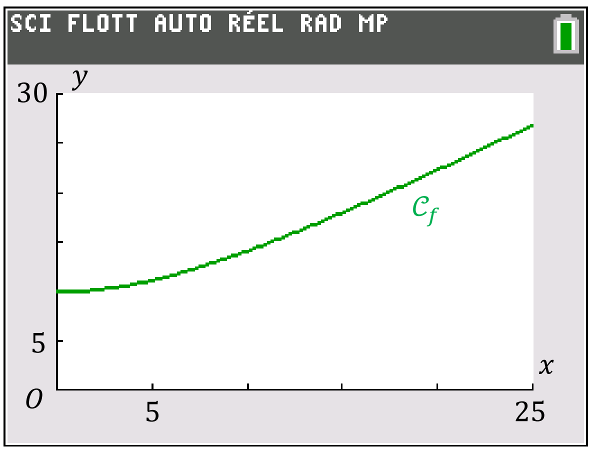
  Xgrad = 5 est la graduation sur l'axe (Ox).

- Choisissez les valeurs minimales et maximales de y :

  Ymin = 0 et Ymax = 30.

  Ygrad = 5 est la graduation sur l'axe (Oy).

Appuyez sur la touche graphe pour afficher la courbe.

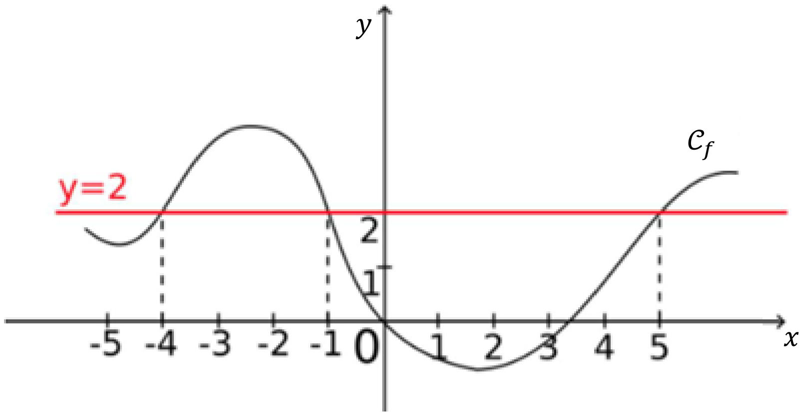


Remarque : Si on choisit le zoom standard (-10 à +10 sur les deux axes) on ne voit pas la courbe.

5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

5.1 Équations et inéquations avec une seule fonction

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5{,}5\,;7]$.



Résoudre sur $[-5{,}5\,;7]$ les équations et inéquations suivantes :

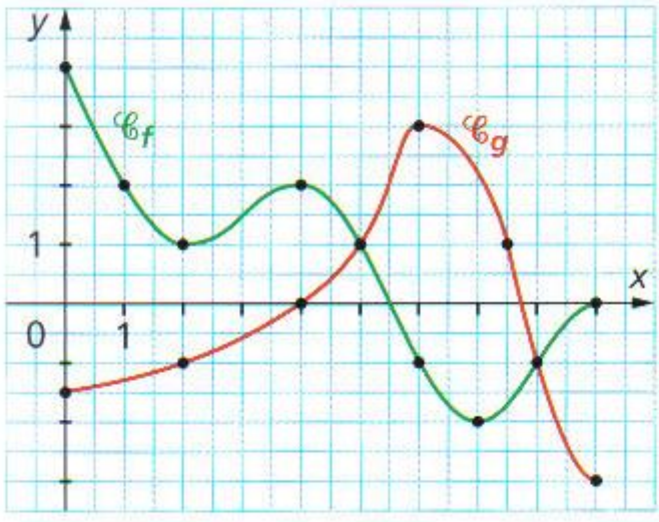
1) $f(x) = 2$

2) $f(x) \geq 2$

3) $f(x) < 2$

5.2 Équations et inéquations avec deux fonctions

On donne ci-après les courbes des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;9]$.



Résoudre sur $[0\,;9]$ les équations et inéquations suivantes :

1) $f(x) = g(x)$

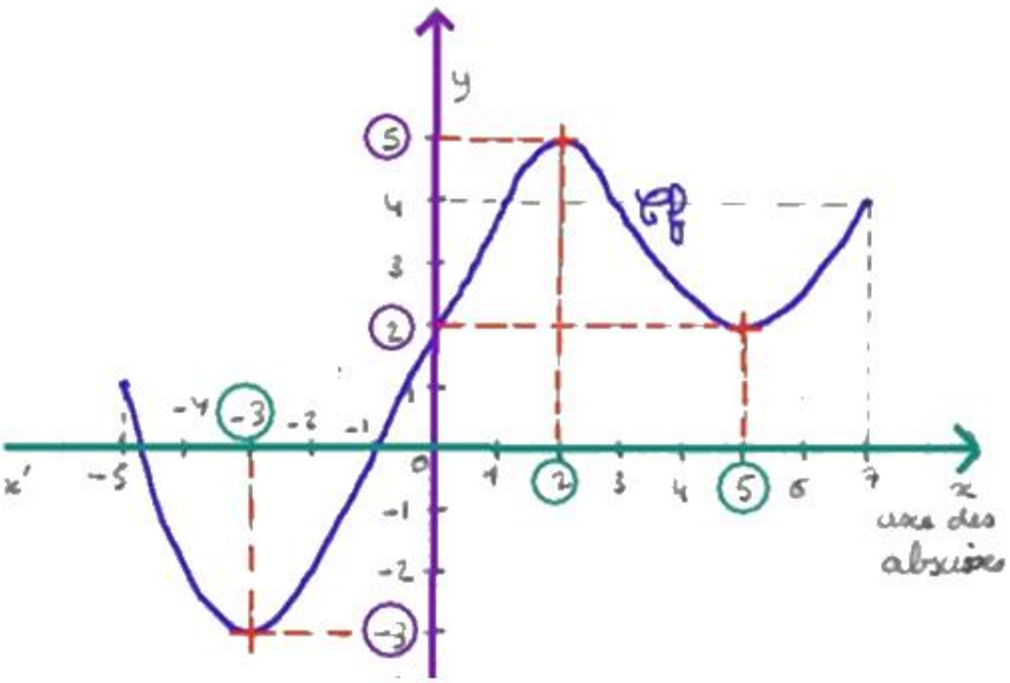
2) $f(x) \geq g(x)$

3) $f(x) < g(x)$

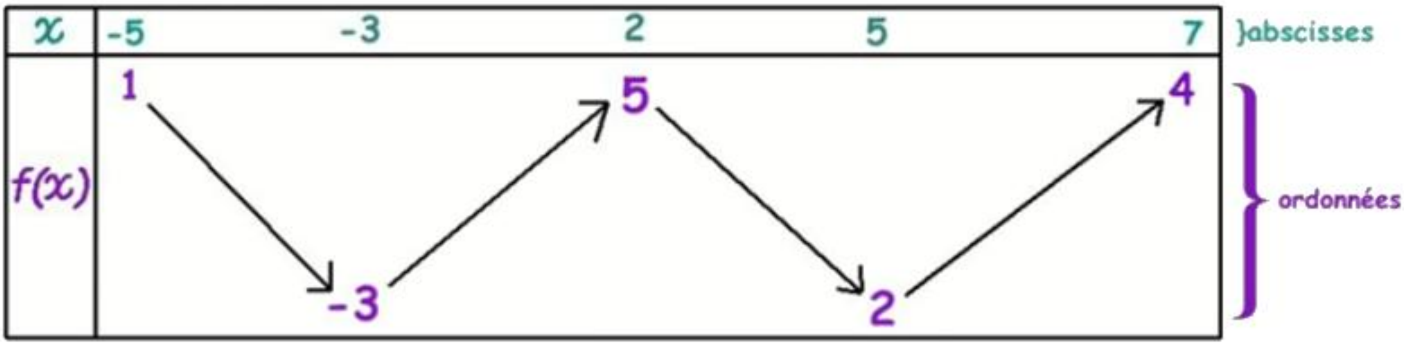
6 Sens de variation d'une fonction *f*, tableau de variation

Soit la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;7]$.

- On repère les sommets de la courbe. Certains sommets correspondent à un minimum. D'autres correspondent à un maximum.
- On repère aussi le sens de variation de la fonction. Parfois elle est croissante, parfois elle est décroissante.



On en déduit le tableau de variation de la fonction :



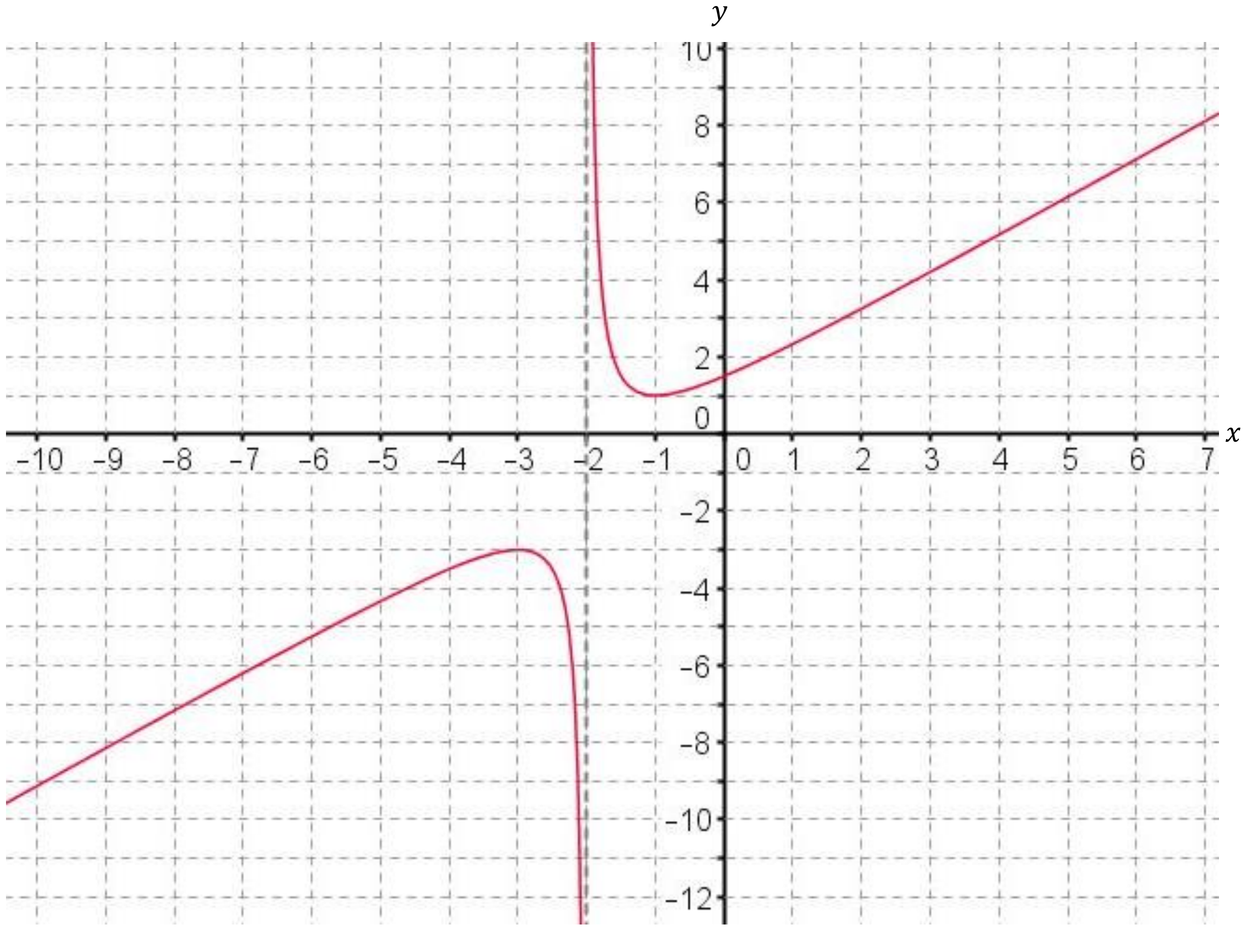
On peut énoncer les variations de la fonction f :

- Sur l'intervalle $[-5\,;\,-3]$ et sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ la fonction est décroissante.
- Sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$ et sur l'intervalle $[5\,;\,7]$ la fonction est croissante.
- f a un minimum. Il vaut -3 et il est atteint en $x = -3$.
- f a un maximum. Il vaut 5 et il est atteint en $x = 2$.

Remarque : On appelle **extremum** d'une fonction soit un minimum soit un maximum.

Cas particulier : valeur "interdite"

- On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f.



1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Pourquoi $x = -2$ est-elle une valeur particulière pour la fonction f ?
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Réponse :

1) L'ensemble de définition de la fonction f est $D =]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]-2\,;\,+\infty[$

2) La courbe $\mathcal{C}_f$ n'a aucun point d'abscisse -2. Cela traduit le fait que $f(-2)$ n'existe pas.
Autrement dit la fonction f n'est pas définie pour $x = -2$.

3) Le tableau de variation de la fonction f est :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
Variations de f		↗	-3	↘	‖	↘	1	↗	

7 Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

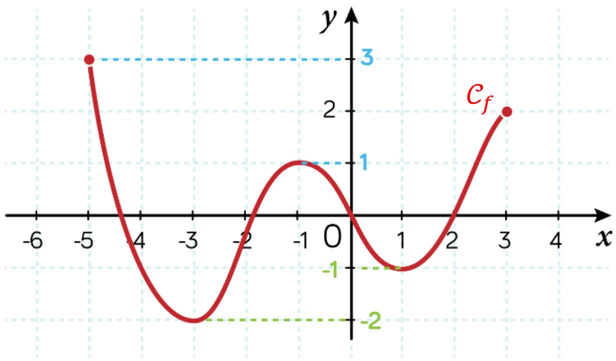
On dit que f a pour **maximum M** sur I s'il existe un réel a dans I tel que $f(a) = M$ et $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, M (s'il existe) est **l'ordonné du point le plus haut** de la courbe de f sur I.

On dit que f a pour **minimum m** sur I s'il existe réel b dans I tel que $f(b) = m$ et $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, m (s'il existe) est **l'ordonné du point le plus bas** de la courbe de f sur I.

Exemples

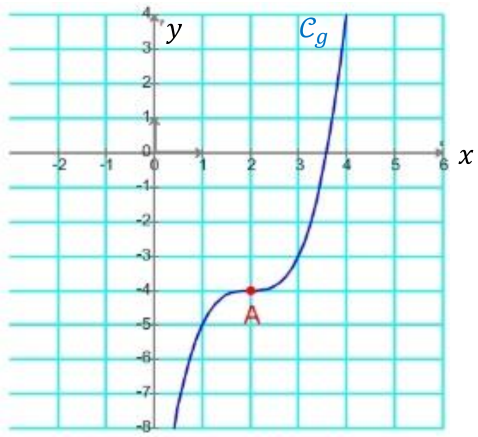
La fonction f est définie sur $[-5\ ;\ 3]$.

- f a comme minimum -2. Il est atteint en $x = -3$.
- f a comme maximum 3. Il est atteint en $x = -5$.



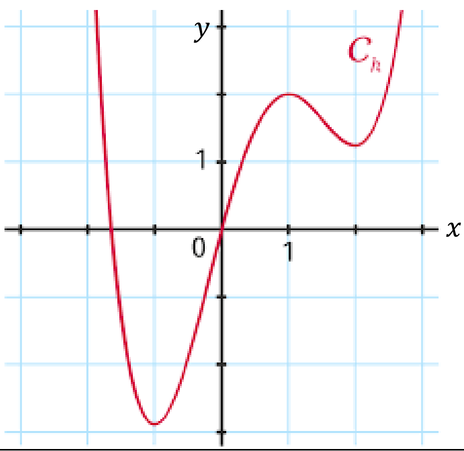
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

- g n'a pas de minimum.
- g n'a pas de maximum.



La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.

- h a comme minimum $-2{,}8$. Il est atteint en $x = -1$.
- h n'a pas de maximum.



8 Premières fonctions de référence étudiées : les fonctions affines

8.1 Rappel des connaissances sur les fonctions affines

Exemple

Dans un jeu vidéo, on a le choix entre trois personnages dont *la force se mesure en points.*

Le jeu se déroule en 25 époques. Tous les personnages commencent à l'époque 0 et terminent à l'époque 25 mais leurs évolutions diffèrent.

- Le guerrier dit : « Je commence avec 50 points et je ne gagne pas d'autre points au cours du jeu ».
- Le mage dit : « Je commence avec 0 point et je gagne 3 points par époque ».
- Le chasseur dit : « Je commence avec 20 points et je gagne 2 points par époque ».

1) Compléter le tableau suivant :

Epoque du jeu	0	1	5	10	15	25
Force du guerrier (en points)						
Force du mage (en points)						
Force du chasseur (en points)						

2) Pour chacun des personnages, dire si sa force est proportionnelle à l'époque du jeu. Si oui, préciser le coefficient de proportionnalité.

3) Donner par des fonctions f, g et h la force du guerrier, du mage et du chasseur en fonction de l'époque du jeu notée x.

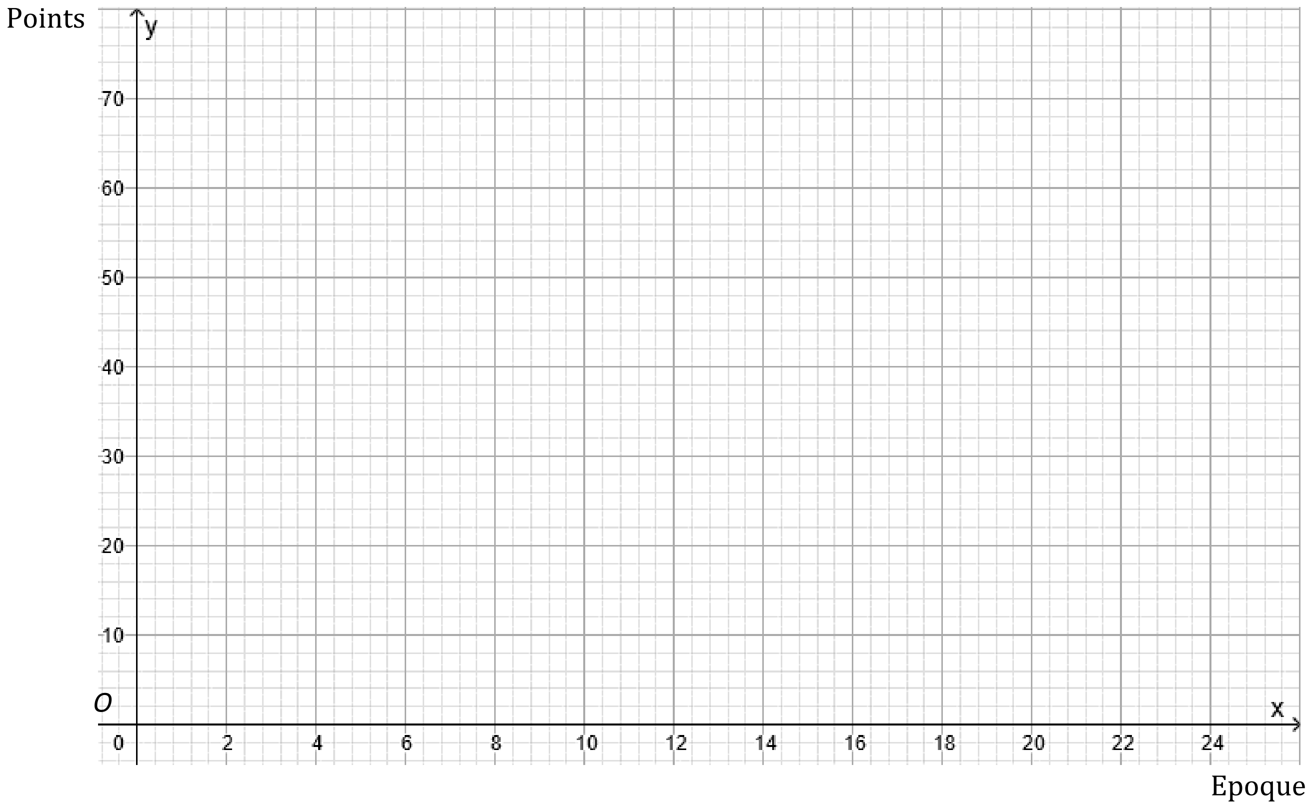
4) a) Quelle est la nature commune de ces fonctions f, g et h ?

b) A l'intérieur de cette nature commune, certaines fonctions sont-elles particulières ?

c) Quelle est la nature de la fonction qui traduit la **proportionnalité** entre l'époque x du jeu et la force du personnage ?

5) a) Comment sont représentées les fonctions f, g et h dans un repère ?

b) Représenter ces trois fonctions dans le repère orthogonal ci-dessous (prendre trois couleurs différentes pour le guerrier, pour le mage et pour le chasseur).



Soit f une fonction affine définie sur$\mathbb{R}$. On a alors :

$f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ où x peut être remplacé par n'importe quel réel.
$\boldsymbol{a}$ est une constante réelle appelée **coefficient directeur**.
$\boldsymbol{b}$ est une constante réelle appelée **ordonnée à l'origine.**
Dans un repère orthonormé ou orthogonal, une fonction affine est représentée par une droite.

Il existe deux types de fonctions affines particulières :

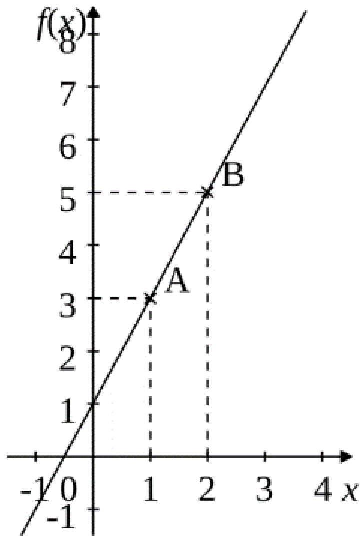
- Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ et f est appelée une **fonction constante**. Elle est alors représentée par une droite parallèle à l'axe (Ox).
- Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ et f est appelée une **fonction linéaire**. Elle est alors représentée par une droite passant par le point origine $O(0; 0)$.

Réciproquement, si dans un repère orthonormé ou orthogonal une fonction est représentée par une droite non verticale alors on peut affirmer que la fonction est une fonction affine (éventuellement linéaire si la droite passe par l'origine).

Une fonction linéaire f traduit la proportionnalité entre x et $f(x)$.

Représenter une fonction affine revient à tracer une droite, il faut donc deux points.

Si $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ alors la droite passe par les points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$.



8.2 Reconnaitre des fonctions affines

Exemples

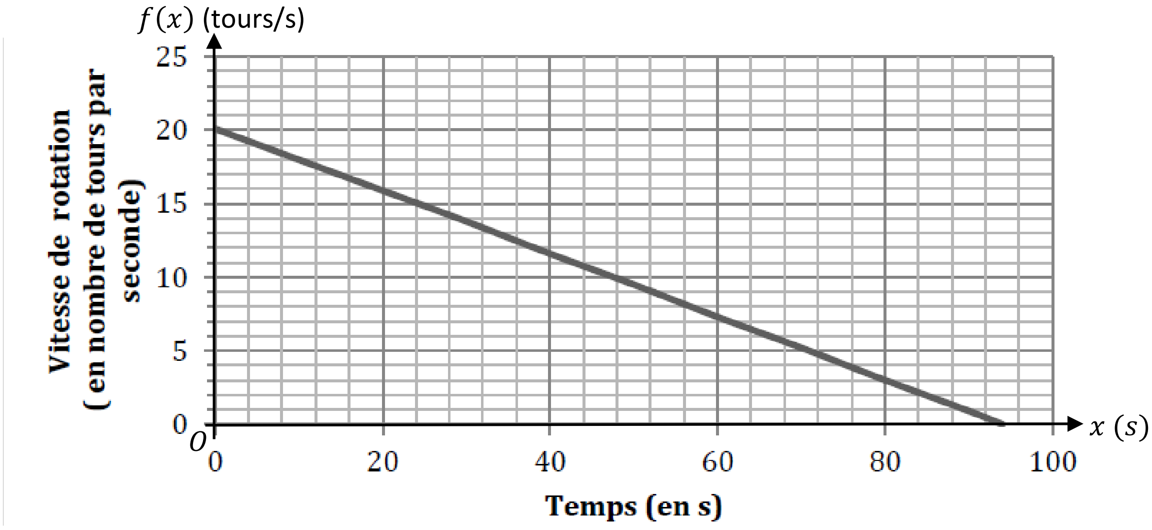
Compléter le tableau suivant par oui ou par non :

Expression	Fonction affine ?	Fonction linéaire ?	Fonction constante ?
$f(x) = 2x - 3$			
$f(x) = 3$			
$f(x) = \sqrt{3}x + \pi$			
$f(x) = \dfrac{3x}{2}$			
$f(x) = \dfrac{2}{x} + 3$			
$f(x) = \dfrac{-3x + 7}{5}$			
$f(x) = 2x^2 - 3$			

8.3 Trouver l'expression d'une fonction affine par calcul et par lecture

Le hand-spinner est une toupie plate qui tourne sur elle-même.

On a représenté, ci-dessous, la vitesse de rotation (exprimée en nombre de tours par seconde) du hand-spinner notée $f(x)$ en fonction du temps (exprimé en seconde) noté x :



1) Le temps et la vitesse de rotation sont-ils proportionnels ?

Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier à l’aide du graphique.

2) On admet qu’au bout de 20 secondes la vitesse de rotation est de 15,75 tours par secondes et qu’au bout de 80 secondes, la vitesse de rotation est de 3 tours par seconde.

   Calculer l’expression $f(x)$ de sa vitesse (en tours par seconde) en fonction de x le temps écoulé en seconde.

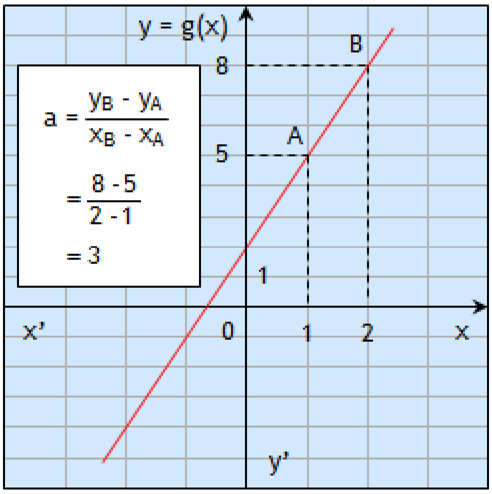
3) Trouver l’expression $f(x)$ par lecture graphique.

A retenir

- Pour calculer l'expression d'une fonction affine f d'expression $f(x) = ax + b$ il faut deux images $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.
- On commence par calculer le coefficient directeur par la formule :

$$\boxed{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

- Ensuite on calcule b en utilisant la valeur de a trouvée précédemment et en utilisant par exemple x_1 et y_1.



- On lit l'expression de la fonction affine dans un repère orthogonal par la méthode suivante :

b est l'ordonnée à l'origine donc $b = f(0)$.

b se lit à l'intersection de la droite représentant la fonction affine avec l'axe des ordonnées.

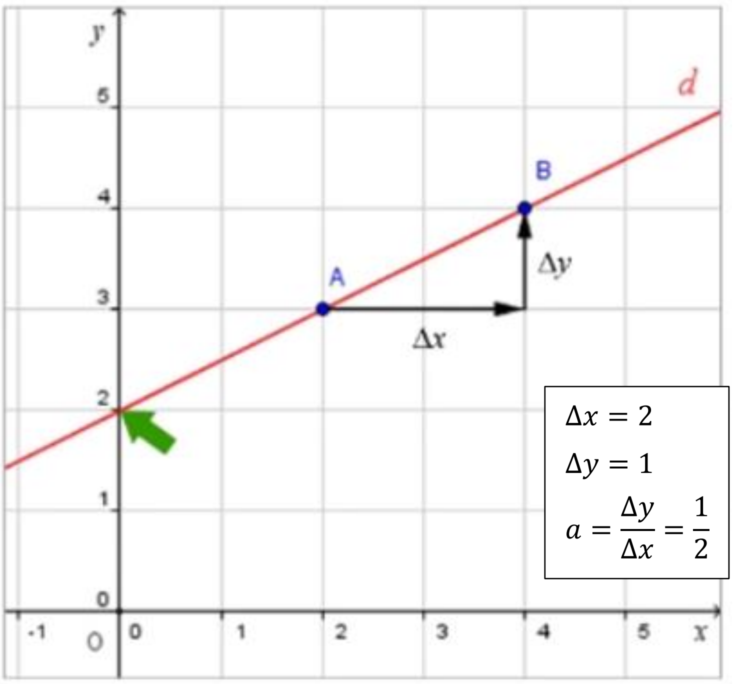
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou ce qui revient au même :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

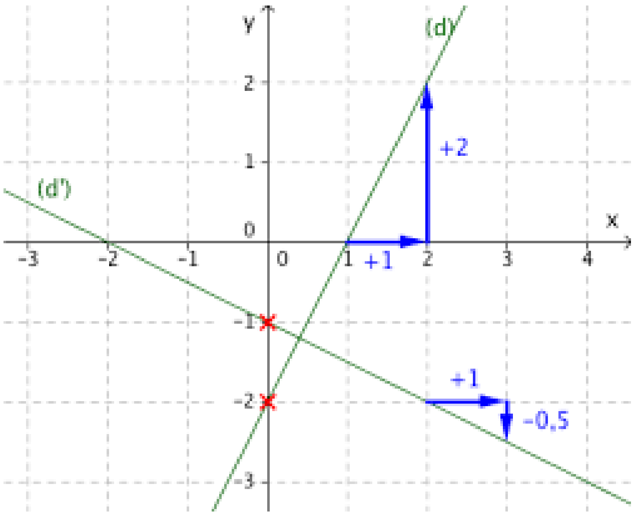
ou, écrit en abrégé,

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



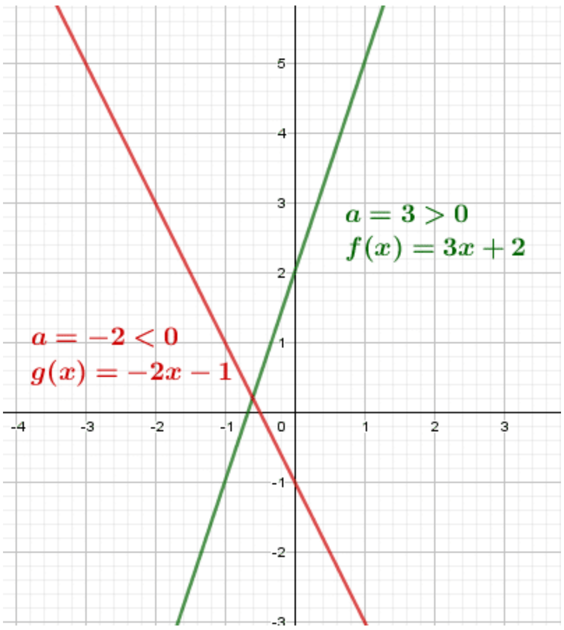
- On sélectionne un point A sur la droite représentant la fonction affine.
- Δx est le décalage horizontal et Δy est le décalage vertical nécessaire pour atteindre un autre point B de la droite.
- Les déplacements Δx et Δy sont positifs s'ils sont dans le sens d'orientation de l'axe et négatifs sinon.

Exemple : Lire les expressions des fonctions représentées par les droites (d) et (d’).



8.4 Sens de variation d'une fonction affine

Exemple



1) Quel est le sens de variation des fonction f et g sur $\mathbb{R}$?

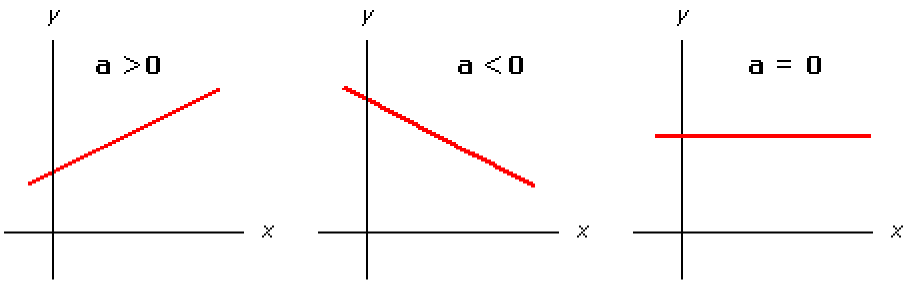
2) Comment peut-on connaitre leur sens de variation sans tracer leur droite représentative ?

3) Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.

A retenir

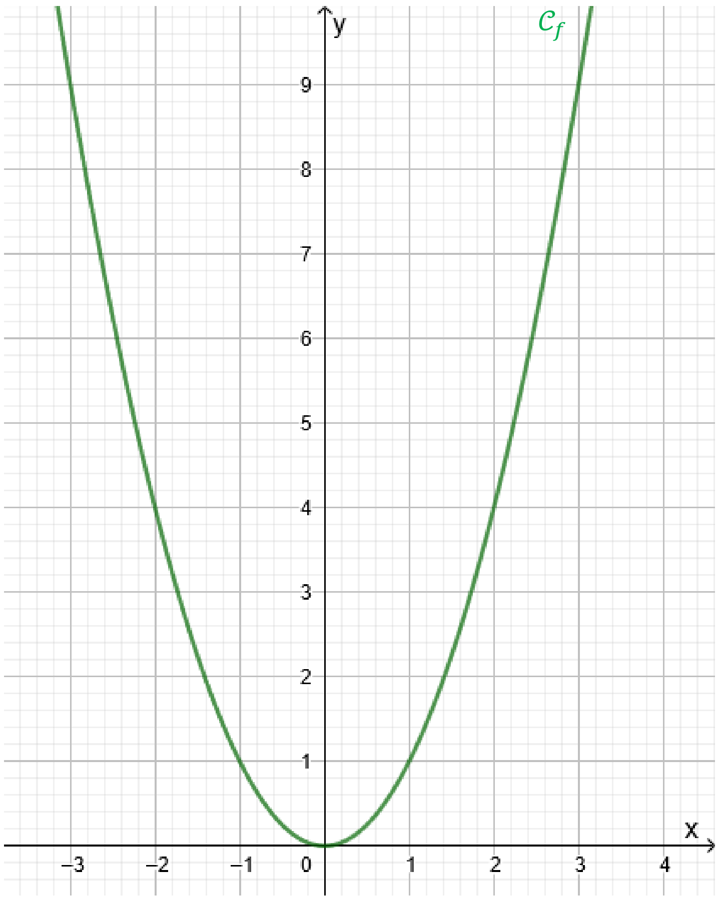
Une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est :

- croissante si $a > 0$
- décroissante si $a < 0$
- constante si $a = 0$



9 Fonction carré

La fonction carré f est la fonction qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^2$.



Exemples

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

10 Fonction inverse

La fonction inverse f est la fonction qui, à tout réel x **différent de zéro**, associe $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemples

x	$f(x)$
-3	$-\frac{1}{3} \approx -0{,}33$
-2	$-\frac{1}{2} = -0{,}5$
-1	-1
0	n'existe pas
1	1
2	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
3	$\frac{1}{3} = 0{,}33$
4	$\frac{1}{4} = 0{,}25$

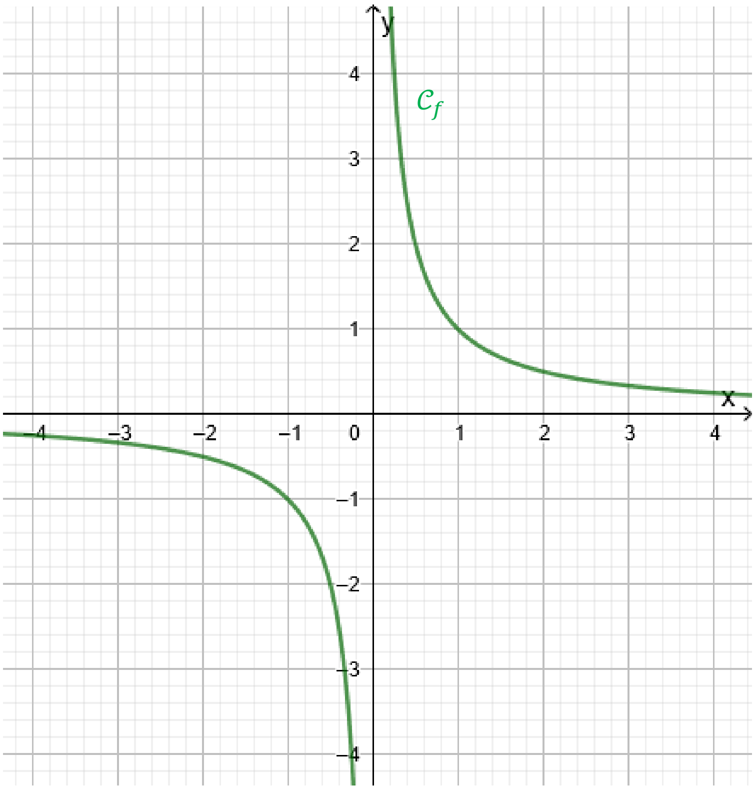


Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

11 Fonction cube

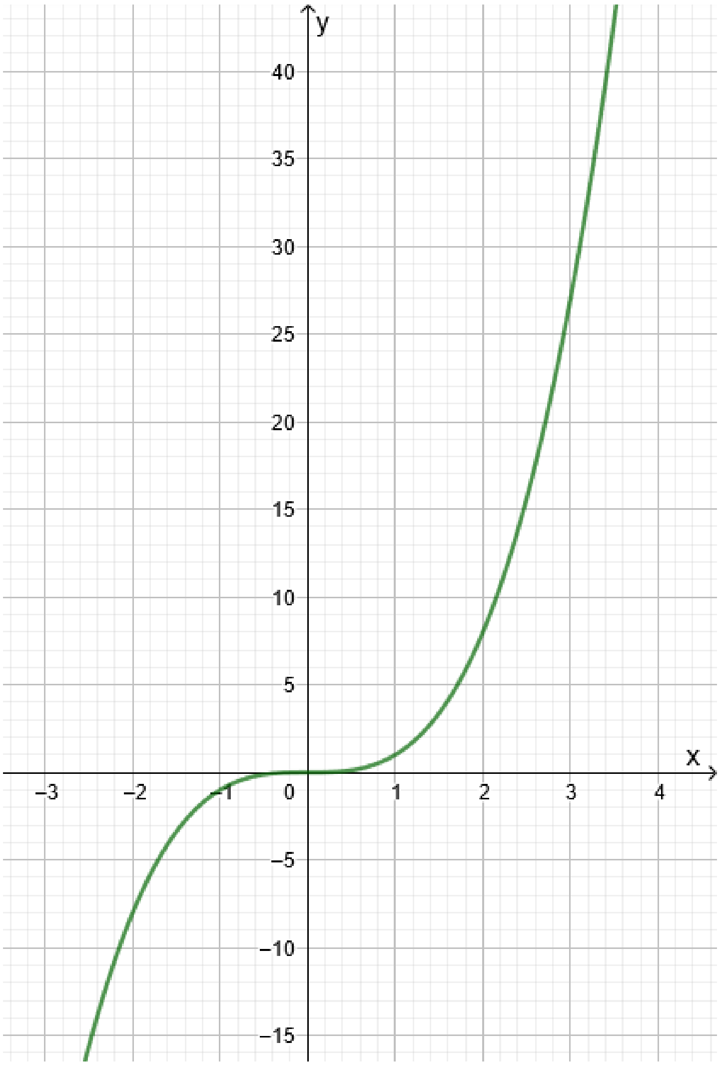
La fonction cube f est la fonction qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3$.

Exemples

x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	$\nearrow$



12 Fonction racine carrée

La fonction racine carrée f est la fonction qui, à tout réel x **positif**, associe $f(x) = \sqrt{x}$.

Exemples

x	$f(x)$
-3	n'existe pas
-2	n'existe pas
-1	n'existe pas
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
3	$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
4	$\sqrt{4} = 2$

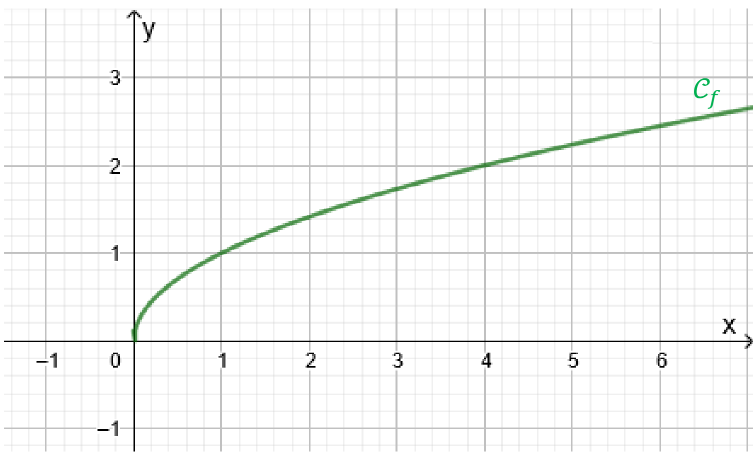


Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	$0 \nearrow$

13 Fonctions paires et impaires

13.1 Fonction paire

Une fonction f, définie sur son ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite **paire** si pour tout réel x de D, on a $f(-x) = f(x)$.

La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

13.2 Fonction impaire

Une fonction f, définie sur son ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite **impaire** si pour tout réel x de D, on a $f(-x) = -f(x)$.

La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport au centre $\boldsymbol{O}$** du repère.

13.3 Parité des fonctions usuelles

	Fonction carré	Fonction inverse	Fonction cube	Fonction racine carrée
Allure de la courbe de ces fonctions				
L'ensemble de définition D (à préciser) est-il symétrique par rapport à 0 ?				
A-t-on $f(-x) = f(x)$?				
A-t-on $f(-x) = -f(x)$?				
La courbe est-elle symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ?				
La courbe est-elle symétrique par rapport à l'origine du repère ?				
La fonction est-elle paire ?				
La fonction est-elle impaire ?				