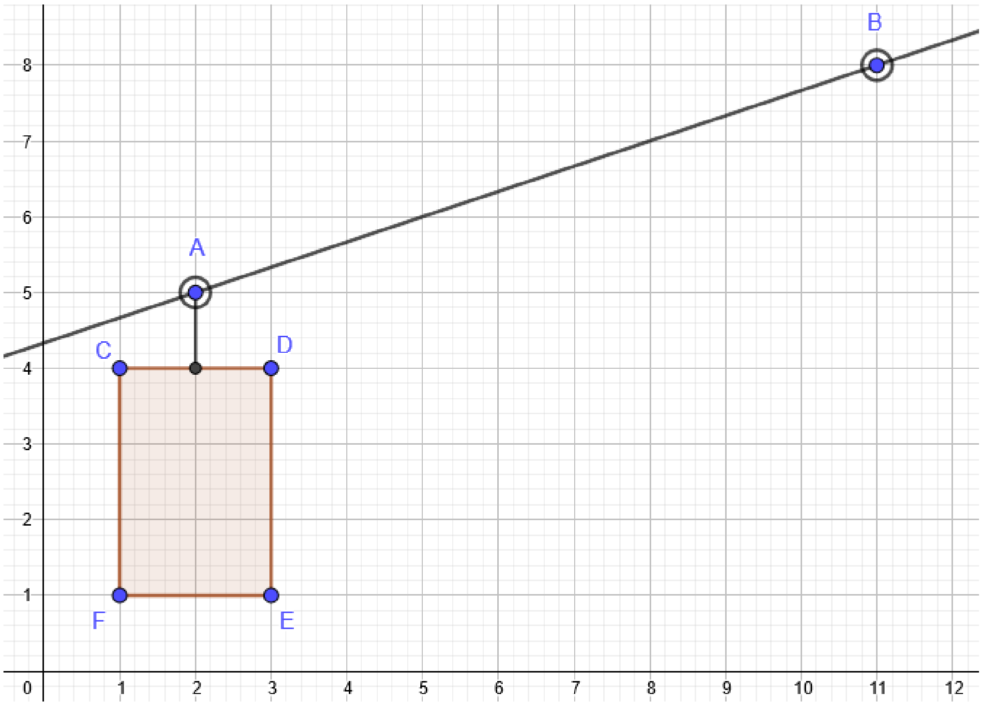
Chapitre 6 : Vecteurs 1

Chapitre 6 : Vecteurs 1

1 Translations

Activité

Une télécabine se déplace le long d'un câble de A vers B.



Dessiner ci-dessus la télécabine lorsqu'elle sera arrivée au terminus B.

On appelle ce déplacement une **translation** de A vers B.

Déplacer une figure par une translation, c'est faire glisser cette figure *sans la faire tourner*.
Pour décrire ce déplacement, il faut donc connaitre :

- la direction
- le sens
- la longueur

du parcours.

Pour cela on utilise un nouvel outil mathématique : les **vecteurs**.

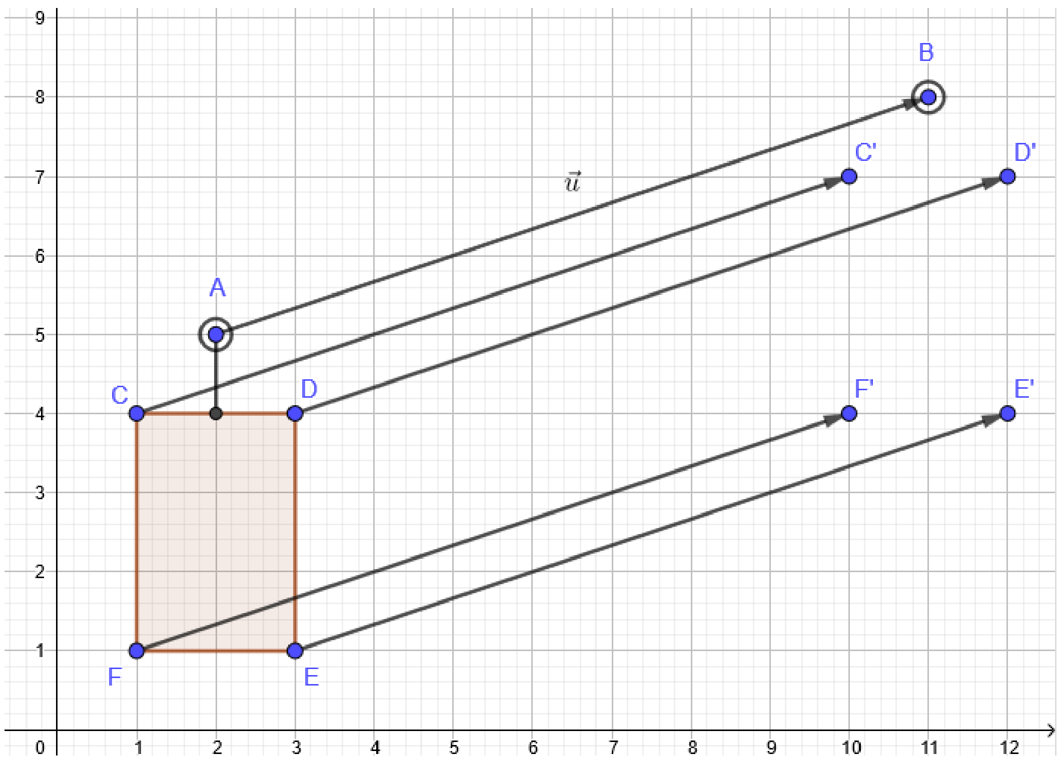
2 Vecteurs

2.1 Définition

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa **direction**
- son **sens**
- sa **norme** (c'est la longueur du segment $[AB]$)

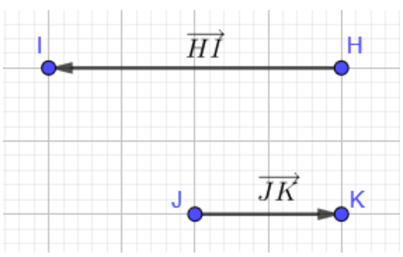
Exemple 1



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{FF'}$ ont la **même direction, le même sens et la même norme.** Ils sont donc **égaux**.

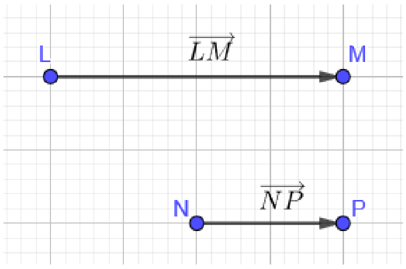
Exemple 2

Sur la figure ci-dessous les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{JK}$ ont la même direction mais ont des **sens opposés.**



Exemple 3

Sur la figure ci-dessous les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et NP ont le même sens mais pas la même norme**.**



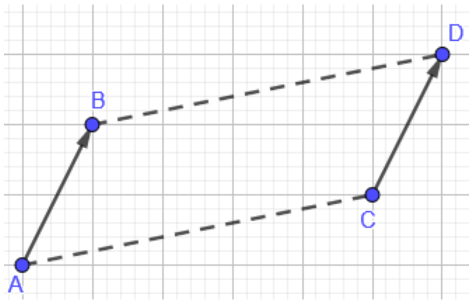
Dans l'exemple 1, on parle de translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On dit que A est l'origine du vecteur et B son extrémité.

On dit que B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.2 Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.



$\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$ signifie que :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, c'est à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens, c'est à dire que le sens est le même de A vers B que de C vers D.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme, c'est à dire que $AB = CD$. On note aussi $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$.

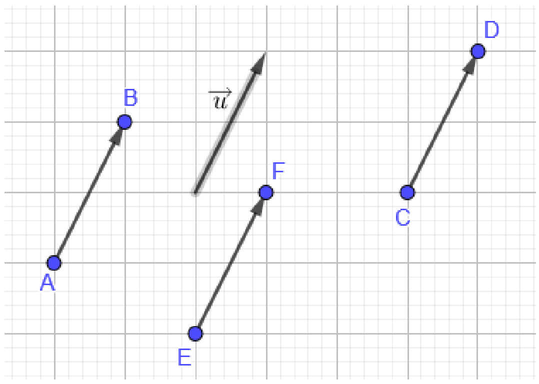
$\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme.

2.3 Notation $\vec{u}$

***Définition* : Le vecteur $\vec{u}$ et ses représentants**

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\vec{u}$ indépendamment des deux points.

D'où $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.



2.4 Vecteurs particuliers

Définition **: Vecteur nul**

Soit A un point quelconque du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé **vecteur nul**.

Le vecteur nul est noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction ni sens. Sa norme est égale à zéro.

Remarque

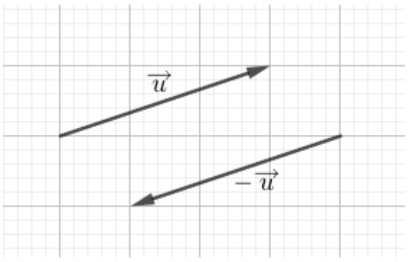
Soit A et B deux points du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au **vecteur nul** équivaut à A et B sont confondus.

Définition **: Vecteur opposé**

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le **vecteur noté $-\vec{u}$**. Il a la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais a le *sens contraire* de $\vec{u}$.



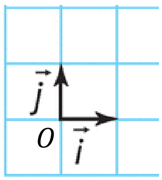
3 Coordonnées d'un vecteur dans une base

3.1 Repère : nouvelle notation

Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ ainsi $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

Le repère (O, I, J) s'écrit aussi $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}\,; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$



On dit que le repère $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}\,; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ **est un repère** orthonormé ou que $(\vec{\boldsymbol{\imath}}\,; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$**est une base** orthonormée.

Le **repère** sert pour des coordonnées de **points**. La **base** sert pour des coordonnées de **vecteurs**.

3.2 Coordonnées d'un vecteur

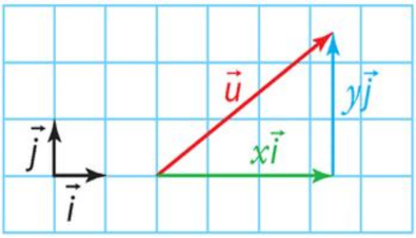
Propriété

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose *de manière unique* sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

où x et y sont deux nombres réels.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.



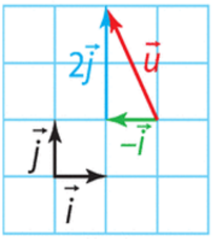
Remarque

Parfois, lorsqu'on veut préciser les notations, on note $x_{\vec{u}}$ l'abscisse de $\vec{u}$ et $y_{\vec{u}}$ l'ordonnée de $\vec{u}$.

$x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{u}}$ **sont des réels.**

Exemple

Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ce que l'on peut aussi noter $\vec{u}(-1\,;2)$ ou encore $\vec{u} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.



Remarque

Le vecteur nul a pour coordonnées $(0\,;0)$.

3.3 Égalité de deux vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

3.4 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

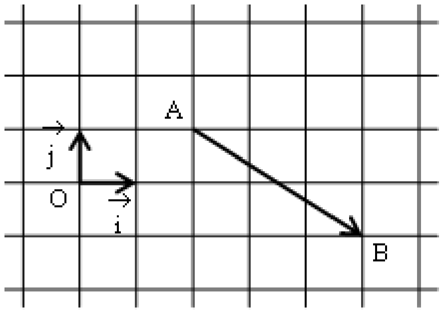
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple

Si $A(2\,;1)$ et $B(5\,;-1)$

alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$



4 Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$,la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarque

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

On retrouve la formule déjà vue de la distance entre deux points *dans un repère orthonormé*.

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ on a : $A(-6\,;\,-2)$ et $B(2\,;2)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ puis la distance AB.

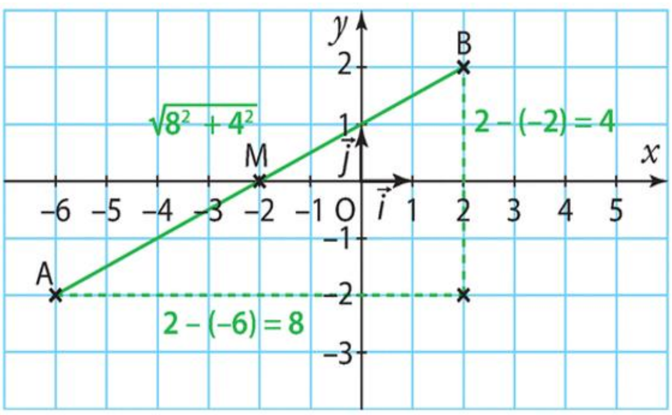
On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-6) \\ 2-(-2) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculons la distance AB à partir des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{64+16}.$

$AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9\ unités\ de\ longueur.$

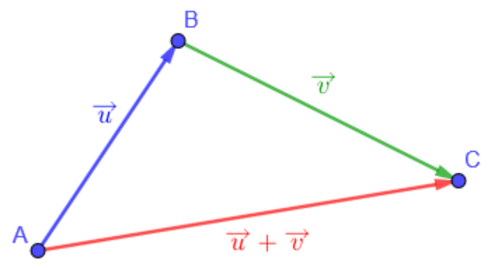


5 Somme et différence de deux vecteurs

5.1 Somme de deux vecteurs

Propriété **: Relation de Chasles**[1]

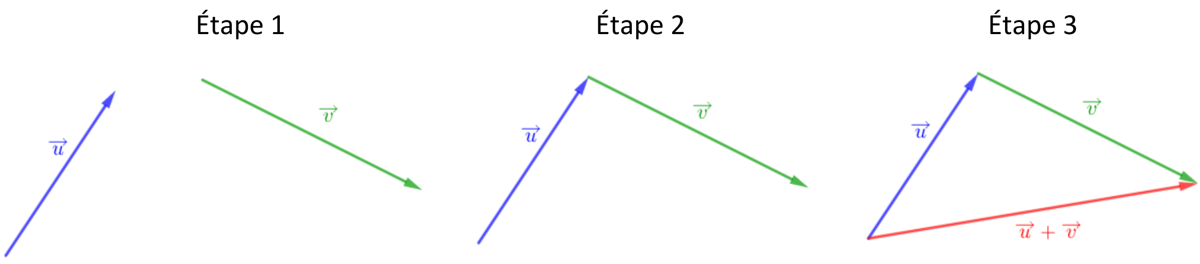
On définit la somme vectorielle $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B}C}$ comme étant le vecteur $\overrightarrow{AC}$.



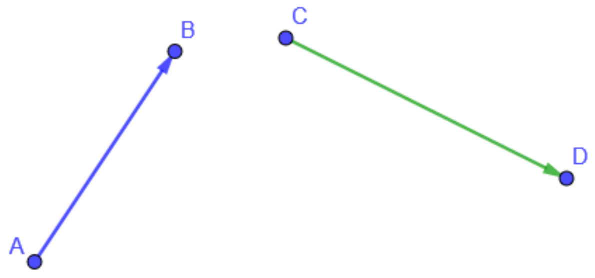
Ce vecteur correspond à la translation « bilan » que l'on obtient en faisant successivement les translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BC}$.

Autrement dit « aller de A vers B puis de B vers C, revient à aller directement de A vers C ».

Construction géométrique **:** On déplace l'un ou l'autre ou les deux vecteurs *pour se ramener à une construction « bout à bout »* utilisant la relation de Chasles.



Exemple **:** On considère quatre points A, B, C, D



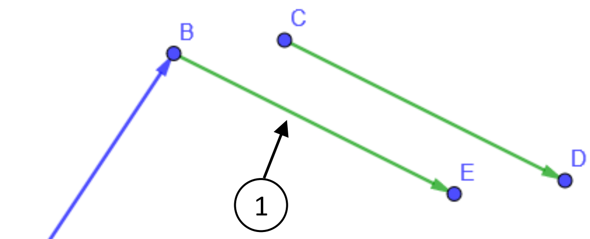
Construire le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

[1] **Michel CHASLES :** Mathématicien français, né le 15 novembre 1793 à Épernon (en Eure-et-Loir) et mort le 18 décembre 1880 à Paris.

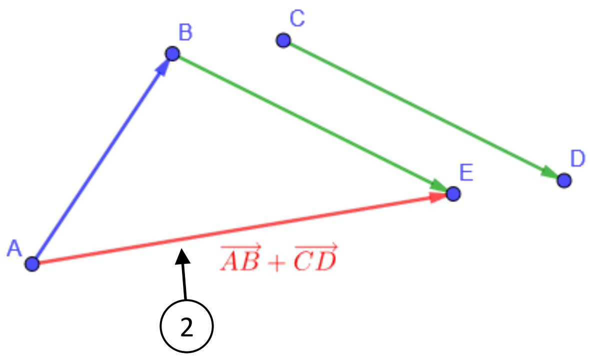
Réponse :

Pour construire une somme de vecteurs, on *se ramène à une construction « bout à bout ».*

1. On trace un représentant du 2e vecteur *en partant de l'extrémité B du 1er vecteur.*



2. On relie **l'origine du 1er** vecteur à **l'extrémité du 2e** vecteur



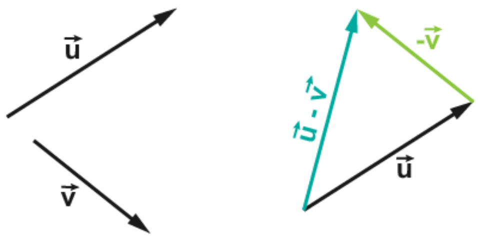
5.2 Différence de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On pose $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Ainsi, ***soustraire un vecteur $\vec{v}$,***

c'est ajouter son opposé $-\vec{v}$.



5.3 Coordonnées de la somme et de la différence de deux vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtiennent en faisant la somme des coordonnées :

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

De même :

Les coordonnées du vecteur différence $\vec{u} - \vec{v}$ s'obtiennent en faisant la différence des coordonnées :

$$\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alors

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -4 - 1 \\ 1 + 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

illustration :