

Chapitre 7 : Pourcentages

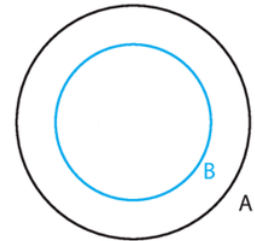
1	Pourcentage instantané	2
1.1	Proportion d'éléments de B dans A	2
1.2	Proportion de proportion.....	2
2	Pourcentage d'évolution	3
2.1	Variation absolue et taux d'évolution	3
2.2	Lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution	4
2.3	Évolutions successives.....	5
2.4	Évolution réciproque	6

Chapitre 7 : Pourcentages

1 Pourcentage instantané

1.1 Proportion d'éléments de B dans A

Soit un ensemble A contenant n_A éléments. Soit un ensemble B inclus dans A contenant n_B éléments.



Alors la **proportion** de la population de B dans la population de A est

$$p = \frac{n_B}{n_A}$$

Remarque

p peut s'écrire sous forme de **fraction**, sous forme **décimale** ou sous forme de **pourcentage**.

Exemple

D'après l'INSEE, au 1^{er} janvier 2019, la population française est de 66 992 699 habitants et la sous-population des Français de 15 à 19 ans est de 4 138 777 jeunes.

Calculer la proportion de jeunes français âgés de 15 à 19 ans dans la population française.

Réponse

L'ensemble A est l'ensemble des Français et le nombre d'éléments dans A est $n_A = 66\,992\,699$.

L'ensemble B est l'ensemble des jeunes français de 15 à 19 ans et $n_B = 4\,138\,777$.

La proportion de jeunes français âgés de 15 à 19 ans dans la population française est donc :

$$p = \frac{4\,138\,777}{66\,992\,699}$$

$$p \approx 0,0618$$

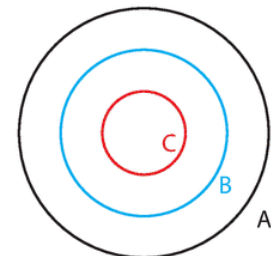
$$p \approx 6,18\%$$

1.2 Proportion de proportion

On considère trois ensembles A , B et C emboîtés tels que $C \subset B \subset A$.

Soit p la proportion de la population de B dans la population de A .

Soit p' la proportion de la population de C dans la population de B .



Alors la proportion de la population de C dans la population de A est

$$p \times p'$$

Exemple

Un magazine contient une proportion $p = \frac{1}{2}$ de pages de publicités.

Parmi les pages de publicités il y a une proportion $p' = 25\%$ de publicités de mode.

Calculer la proportion de pages de publicités de mode dans le magazine.

Réponse

L'ensemble A est l'ensemble des pages du magazine.

L'ensemble B est l'ensemble des pages de publicités.

L'ensemble C est l'ensemble des pages de publicités de mode.

La proportion des pages de publicités de mode parmi toutes les pages du magazine est donc :

$$p \times p' = 0,5 \times 0,25$$

$$p \times p' = 0,125$$

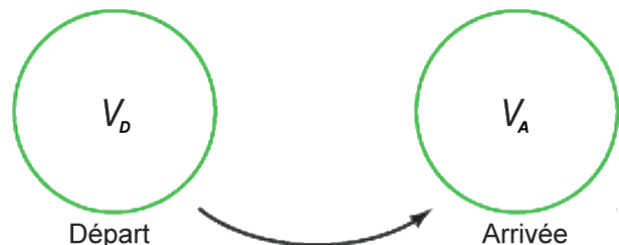
$$p \times p' = 12,5\%$$

Conclusion : 12,5 % des pages du magazine sont des pages de publicités de mode.

2 Pourcentage d'évolution

2.1 Variation absolue et taux d'évolution

Une grandeur varie d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A .



- La **variation absolue** est :

$$V_A - V_D$$

- Le **taux d'évolution** est :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

Remarque

Le **taux d'évolution** est parfois appelé **taux de variation** ou **variation relative**.

C'est la proportion que représente la variation absolue *relativement à la valeur de départ*.

Exemple

D'après l'INSEE, la population d'une ville est passée en cinq ans de 55000 à 74250 habitants.

La variation absolue de population est :

$$74250 - 55000 = 19250 \text{ habitants}$$

La taux t d'évolution de la population est :

$$t = \frac{74250 - 55000}{55000}$$
$$t = \frac{19250}{55000} \qquad t = 0,35 \qquad t = 35 \%$$

La population a donc augmenté de 35 %.

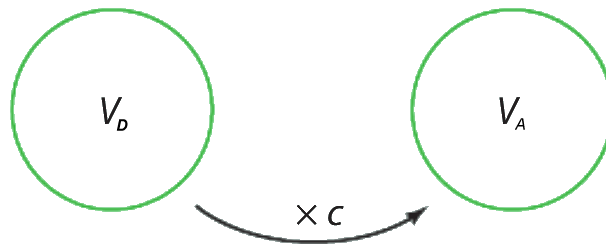
Remarque

Dans cet exemple, on peut aussi considérer c le **coefficient multiplicateur** qui permet de passer de 55 000 à 74 250

$$55\,000 \times c = 74\,250$$

$$c = \frac{74250}{55000}$$

$$c = 1,35$$



2.2 Lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution

$$c = \frac{V_A}{V_D}$$

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

$$t = \frac{V_A}{V_D} - \frac{V_D}{V_D}$$

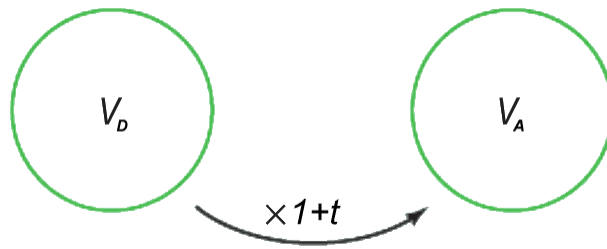
$$t = \frac{V_A}{V_D} - 1$$

$$t = c - 1.$$

Dans l'exemple, on retrouve le taux d'évolution en calculant $t = c - 1$. $t = 1,35 - 1$.

- On retient :

Le coefficient multiplicateur est $c = 1 + t$ où t est le taux d'évolution.



Exemple 1

Le nombre d'abonnés V_D d'un journal en ligne augmente de 30%. Par combien est-il multiplié ?

Réponse

Soit c le coefficient multiplicateur.

Le taux d'évolution est $t = 0,30$. Donc le coefficient multiplicateur est $c = 1 + 0,30$

Le nombre d'abonnés est multiplié par 1,30.

Exemple 2

Le nombre d'abonnés V_D d'un journal en ligne baisse de 10 %. Par combien est-il multiplié ?

Réponse

Soit c le coefficient multiplicateur.

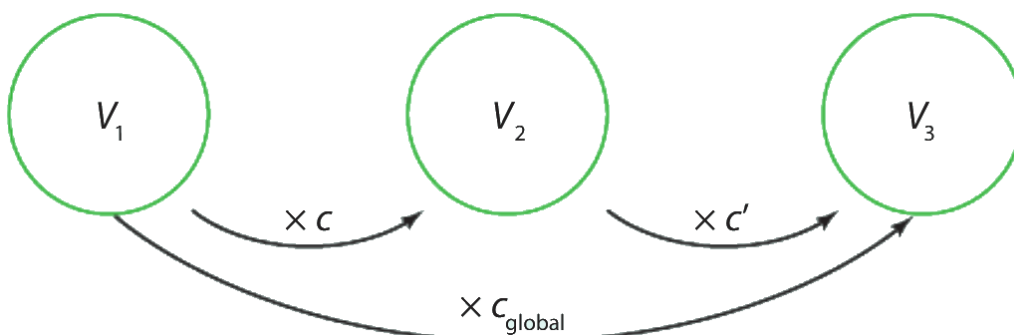
Le taux d'évolution est $t = -0,10$. Donc le coefficient multiplicateur est $c = 1 - 0,10$

Le nombre d'abonnés est multiplié par 0,90.

2.3 Évolutions successives

Lorsqu'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution d'une valeur V_2 à une valeur V_3 , le **taux d'évolution global** est le taux d'évolution entre V_1 et V_3 .

Son coefficient multiplicateur est appelé **coefficient multiplicateur global** et est égal à $c \times c'$



Exemple

Le nombre d'abonnés V_1 d'un journal en ligne augmente de 30 % pour atteindre V_2 puis baisse de 10 % pour atteindre V_3 .

1. Par combien est-il multiplié ?
2. Calculer le taux d'évolution global.

Réponse

1. Le premier coefficient multiplicateur est $c = 1 + 0,30 = 1,30$. Le deuxième coefficient multiplicateur est $c' = 1 - 0,10 = 0,90$.

Le coefficient multiplicateur global est $c \times c' = 1,30 \times 0,90 = 1,17$

Le nombre d'abonnés est multiplié globalement par $c_{global} = 1,17$.

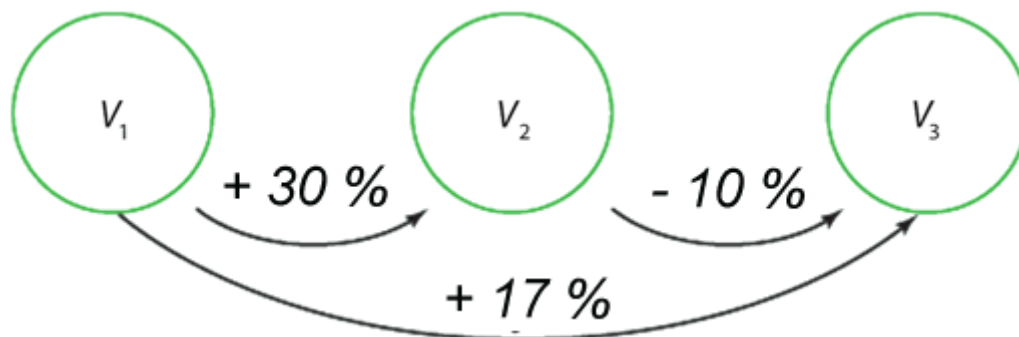
2. $t_{global} = c_{global} - 1$.

$$t_{global} = 1,17 - 1 = 0,17.$$

Le taux d'évolution global est de 17 %.

Remarque

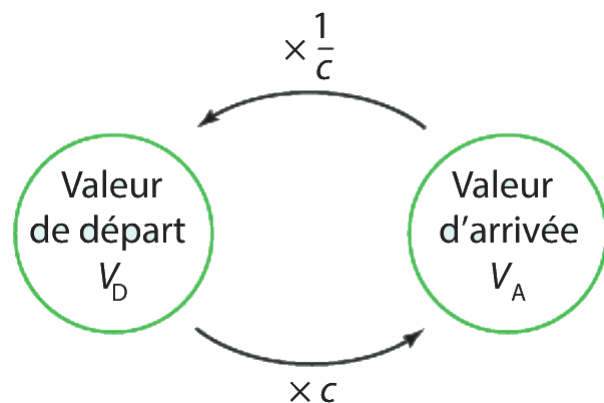
Le taux d'évolution global **n'est pas** la somme des deux taux d'évolution (+30% et -10%).



2.4 Évolution réciproque

Lorsqu'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A , le **taux réciproque** est le taux permettant de revenir de V_A à V_D .

Son coefficient multiplicateur, appelé **coefficient multiplicateur réciproque**, est égal à :



$\frac{1}{c}$

Exemple

Un prix V_D augmente de 25 % et atteint la valeur V_A .

1. Calculer le coefficient multiplicateur réciproque.
2. Calculer le taux d'évolution réciproque.

Réponse

1. Le coefficient multiplicateur "direct" est $c = 1 + 0,25 = 1,25$.

Donc le coefficient multiplicateur réciproque est

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{1,25} = \mathbf{0,80}$$

2. Pour calculer le taux d'évolution réciproque, on utilise la formule :

$$\text{coefficient multiplicateur réciproque} = 1 + \text{taux d'évolution réciproque}$$

Donc :

$$0,80 = 1 + \text{taux d'évolution réciproque}$$

$$0,80 - 1 = \text{taux d'évolution réciproque}$$

$$\text{taux d'évolution réciproque} = -0,20$$

Le taux d'évolution réciproque est de -20% .

Autrement dit, il faut baisser de 20% le prix d'arrivée V_A pour retrouver le prix de départ V_D .

Remarque

Le taux d'évolution réciproque **n'est pas** l'opposé du taux d'évolution "direct" (l'opposé de $+25\%$).

