# Chapitre 8 : Factorisation et résolution

# Chapitre 8 : Factorisation et résolution

## 1 Isoler une variable dans un calcul

Il s'agit d'exprimer une grandeur en fonction des autres afin de la calculer.

**Exemple :** On sait que le volume $V$ d'un cône se calcule en fonction du rayon $R$ de sa base et de sa hauteur $h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Mais il est aussi possible, en partant de cette formule, d'exprimer le rayon $R$ en fonction de $V$ et de $h$ :

$$R^2 = \frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}$$

D'où la nouvelle formule :

$$R = \sqrt{\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h}}$$

Si l'énoncé précise que le volume du cône est $V = 0{,}2\ L$ et la hauteur est $h = 15\ cm$ alors on peut calculer le rayon de la base :
Pour avoir la cohérence des unités, on met tout en $cm$.
On sait que $1\ L = 1000\ cm^3$ donc $V = 200\ cm^3$

$$R = \sqrt{\frac{200}{\frac{1}{3}\pi \times 15}}$$

$$R = \sqrt{\frac{200}{5\pi}} \approx 3{,}57\ cm$$

## 2 Distributivité

### 2.1 Utiliser la distributivité pour faire un développement

Développer un produit de facteurs consiste à le transformer en somme (ou différence) de termes.

- Distributivité simple.

| $\boldsymbol{a(b+c) = ab + ac}$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels. |
|---|

**Exemple :** Développer $A = 2x(x-7)$.
*Réponse*

$$A = 2x \times x + 2x \times -7$$
$$A = 2x^2 - 14x$$

- Distributivité double.

| $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd}$ où $a, b, c$ et $d$ sont des réels. |
|---|

**Exemple :** Développer $A=(5-2x)(x+8)$.
*Réponse*

$$A=5x+40-2x^2-16x$$
$$A=-2x^2-11x+40$$

Remarque :
On regroupe les puissances de $x$ identiques et on écrit le résultat dans l'ordre des puissances de $x$ décroissantes.

## 2.2 Utiliser la distributivité pour faire une factorisation

Factoriser une somme (ou différence) de termes consiste à la transformer en produit de facteurs.

- Distributivité simple.

| $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels. |
|---|

**Exemple 1 :** Factoriser $B=2x(x-7)+2x(5x-3)$.
*Réponse*
On remarque le facteur commun $2x$ dans les deux termes de la somme. On peut donc le factoriser :

$$B=2x\big((x-7)+(5x-3)\big)$$

Puis on simplifie :

$$B=2x(x-7+5x-3)$$
$$B=2x(x+5x-7-3)$$
$$B=2x(6x-10)$$

**Exemple 2 :** Factoriser $C=(2x-3)(x-7)+(2x-3)(5x-3)$.
*Réponse*
On remarque le facteur commun $2x-3$ dans les deux termes de la somme. On peut donc le factoriser :

$$C=(2x-3)\big((x-7)+(5x-3)\big)$$

Puis on simplifie :

$$C=(2x-3)(x-7+5x-3)$$
$$B=(2x-3)(x+5x-7-3)$$
$$B=(2x-3)(6x-10)$$

# 3 Identités remarquables

Trois identités remarquables sont à connaitre.

## 3.1 Une somme au carré

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = aa + ab + ba + bb$$
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}}$$

**Exemple :** Factoriser $A = 4x^2 + 12x + 9$

*Réponse*

On remarque que $4x^2 = (2x)^2$ et que $9 = 3^2$.

Il se peut donc que $A = a^2 + 2ab + b^2$ avec $\begin{cases} a = 2x \\ b = 3 \end{cases}$

$2ab$ donne bien $2ab = 2 \times 2x \times 3 = 12x$.

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2$

Donc :

$A = (2x+3)^2$

## 3.2 Une différence au carré

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$(a-b)^2 = aa - ab - ba + bb$$
$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}}$$

**Exemple :** Factoriser $B = 25x^2 - 30x + 9$

*Réponse*

On remarque que $25x^2 = (5x)^2$ et que $9 = 3^2$.

Il se peut donc que $B = a^2 - 2ab + b^2$ avec $\begin{cases} a = 5x \\ b = 3 \end{cases}$

$2ab$ donne bien $2ab = 2 \times 5x \times 3 = 30x$.

$25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2(5x)(3) + (3)^2$

Donc :

$B = (5x-3)^2$

## 3.3 Une différence de deux carrés

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ba - bb$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

Finalement :

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

**Exemple :** Factoriser $C = 25x^2 - 64$

*Réponse*

On remarque que $25x^2 = (5x)^2$ et que $64 = 8^2$.

donc $25x^2 - 64$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 8$.

Donc $25x^2 - 64$ se factorise en :

$$C = (5x+8)(5x-8)$$

# 4 Equation « produit nul »

Une équation « produit nul » est de la forme :

$$(ax+b)(cx+d) = 0 \quad avec\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\ et\ d \in \mathbb{R}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)(-x+3) = 0$

*Réponse*

$(x+2)(-x+3) = 0$

$(x+2) = 0$ ou $(-x+3) = 0$

$x = -2$ ou $3 = x$

L'ensemble des solution $\mathcal{S} = \{-2\,;3\}$

**Exemple 2 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-7)(x+1) - x^2 + 1 = 0$

*Réponse*

Il faut d'abord factoriser pour avoir une équation produit. On peut utiliser une identité remarquable.

$$(2x-7)(x+1) - x^2 + 1 = 0$$
$$(2x-7)(x+1) + 1 - x^2 = 0$$
$$(2x-7)(x+1) + 1^2 - x^2 = 0$$
$$(2x-7)(x+1) + (1+x)(1-x) = 0$$

Puis on factorise en utilisant le facteur commun $(x+1)$ :

$(x+1)(2x-7+1-x) = 0$

$(x+1)(x-6)=0$

$(x+1)=0$ ou $(x-6)=0$
$x=-1$ ou $x=6$

L'ensemble des solution $\mathcal{S}=\{-1\,;6\}$

## 5 Simplifier des quotients

$$\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}\quad avec\ a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}^*\ et\ c\in\mathbb{R}^*$$

**Exemple 1 :** Simplifier l'expression

$$A=\frac{3x^2+6x}{x+2}$$

*Réponse*
Il faut d'abord écrire la condition pour un quotient. On ne peut pas diviser par zéro, donc il y a une condition :
$x+2\neq 0$
$x\neq -2$

Ensuite on factorise et on simplifie si possible :
$A=\frac{3x(x+2)}{x+2}$
On divise le numérateur et le dénominateur par $x+2$.
$A=3x$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

**Exemple 2 :** Mettre sous la forme d'un seul quotient l'expression $B=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

*Réponse*
Il faut d'abord écrire les conditions pour un quotient. On ne peut pas diviser par zéro, donc il y a deux conditions :
$x\neq 0$ et $x+1\neq 0$
$x\neq 0\ \ et\ \ x\neq -1$

Ensuite on met sur le même dénominateur les deux fractions :

$$B=\frac{1(x+1)}{x(x+1)}+\frac{2(x)}{(x+1)x}$$

On peut ensuite les additionner :
$B=\frac{1(x+1)+2x}{x(x+1)}$
$B=\frac{3x+1}{x(x+1)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 0\}$

## 6 Equation « quotient nul »

$$\frac{A}{B} = 0 \quad avec\ A \in \mathbb{R}\ \ et\ B \in \mathbb{R}^*$$

Un quotient de facteurs est nul si et seulement si **le numérateur est nul** et le dénominateur non nul.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{(2-x)(x+1)}{x-1} = 0$

*Réponse*

Condition : $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$(2 - x)(x + 1) = 0$

$(2 - x) = 0$ ou $(x + 1) = 0$

$x = 2$ ou $x = -1$

La condition est respectée par ces deux valeurs donc l'ensemble des solution $\mathcal{S} = \{-1\,;2\}$

**Exemple 2 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$$

*Réponse*

Condition : $x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$x^2 - 9 = 0$

$(x + 3)(x - 3) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = -3$ ou $x = 3$

La condition n'est pas respectée par une des deux valeurs donc l'ensemble des solution $\mathcal{S} = \{-3\}$

**Exemple 3 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{3x - 1}{x + 2} = 4$$

*Réponse*

Condition : $x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

On fait d'abord apparaitre 0 dans un des membres de l'équation :

$\frac{3x-1}{x+2} - 4 = 0.$

On met sur un même dénominateur :

$$\frac{3x-1}{x+2} - \frac{4(x+2)}{x+2} = 0.$$

$\frac{3x-1-4(x+2)}{x+2} = 0.$

$\frac{3x-1-4x-8}{x+2}.$

$\frac{-x-9}{x+2} = 0.$

$-x - 9 = 0$

$x = -9$

La condition est respectée par cette valeur donc l'ensemble des solution $\mathcal{S} = \{-9\}$

# 7 Inéquation produit et inéquation quotient

Elles sont de la forme :

$A \times B < 0 \quad avec\ A \in \mathbb{R}\ et\ B \in \mathbb{R}$ ou $\frac{A}{B} < 0 \quad avec\ A \in \mathbb{R}\ et\ B \in \mathbb{R}^*$

On peut avoir $<$ , $\leq$, $\geq ou$ $>$ dans l'inéquation à résoudre.

Elles se résolvent en faisant un tableau de signes qui utilise la règle des signes du produit (ou du quotient) de deux nombres relatifs :

- Des facteurs de même signe donnent un produit (ou un quotient) positif ;

- Des facteurs de signes contraires donnent un produit (ou un quotient) négatif.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $[-3\,;6]$ l'inéquation $3(x-2)(x+2) \leq 0$

On place dans la première ligne l'ensemble de résolution et les valeurs de $x$ qui annulent chaque facteur.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de 3 | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| Signe de $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $3(x-2)(x+2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

On lit sur la dernière ligne que $3(x-2)(x+2)$ est négatif (donc inférieur ou égal à zéro) lorsque $x \in [-2\,;2]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = [-2\,;2]$.

**Exemple 2 :** Résoudre dans $[-3\,;6]$ l'inéquation $\frac{3(x-2)}{x+2} \leq 0$.

*Réponse*

Condition : $x+2 \neq 0$
$x \neq -2$
On dit que $-2$ est une valeur « interdite » au sens où il n'est pas possible de calculer la valeur de $\frac{3(x-2)}{x+2}$ pour $x = -2$. La valeur interdite est signalée par une double barre dans la dernière ligne du tableau de signes.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de 3 | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| Signe de $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $\frac{3(x-2)}{x+2}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |

On lit sur la dernière ligne que $\frac{3(x-2)}{x+2}$est négatif (donc inférieur ou égal à zéro) lorsque $x \in ]-2\,;2]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = ]-2\,;2]$.