Chapitre 14 : Géométrie plane

Chapitre 14 : Géométrie plane

1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

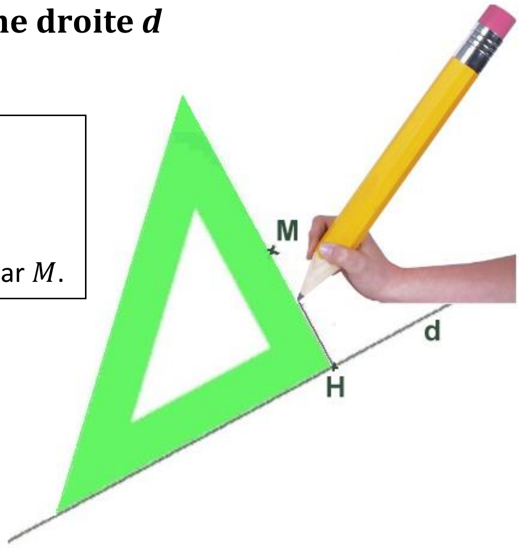
1.1 Projeté orthogonal d'un point M sur une droite d

Définition

Soit une droite d et un point M extérieur à cette droite.

Le **projeté orthogonal** $\boldsymbol{H}$ de M sur d est l' intersection de

la droite d et de la perpendiculaire à la droite d passant par M.



1.2 Distance d'un point M à une droite d

Définition

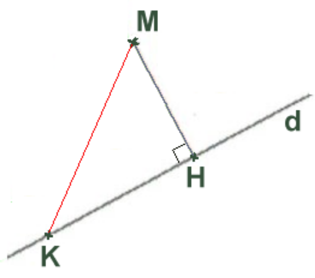
On appelle **distance d'un point $\boldsymbol{M}$ à une droite $\boldsymbol{d}$** la longueur $\boldsymbol{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d.

Propriété

La distance du point M à la droite d **est la plus petite distance** entre le point M et un point de la droite.

Démonstration

Soit K un **point quelconque de la droite $\boldsymbol{d}$ distinct de $\boldsymbol{H}$**. Le triangle MHK est rectangle en H. Donc d'après le théorème de Pythagore on a :



$$MK^2 = MH^2 + HK^2$$

Comme $K \neq H$ on a $HK > 0$ et donc $HK^2 > 0$.

Alors en additionnant MH^2 aux deux membres :

$MH^2 + HK^2 > MH^2$

En utilisant le théorème de Pythagore, cela donne :

$MK^2 > MH^2$

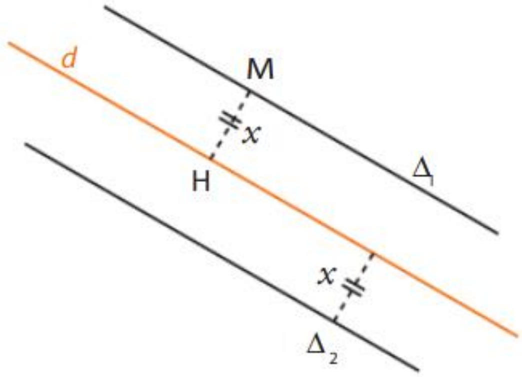
$MK > MH$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.

Toutes les distances MK étant supérieures à MH, MH est donc la plus petite distance.

1.3 Ensemble des points du plan situés à une distance x d'une droite d

Propriété

L'ensemble des points M à une distance fixe x d'une droite d **est l'ensemble des deux droites Δ_1 et Δ_2** parallèles à d, situées de chaque côté de d.

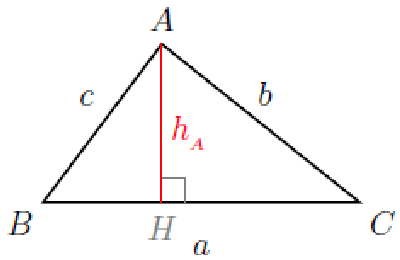


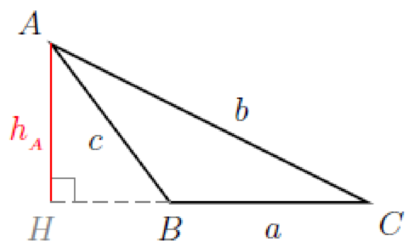
1.4 Hauteur d'un triangle

Soit ABC un triangle.

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

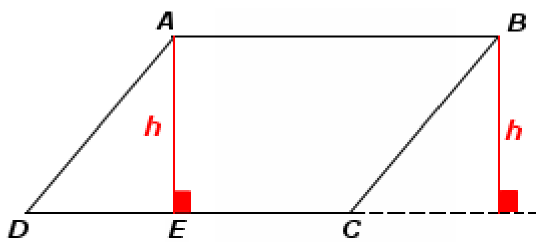
Le segment $[AH]$ est la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Il y a deux configurations possibles selon que pied de la hauteur H appartient ou non au segment $[BC]$:





Remarque

La hauteur issue de A dans un parallélogramme $ABCD$ a une définition similaire.

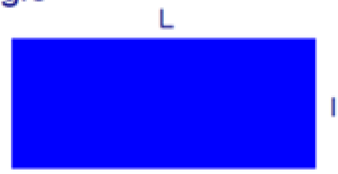


2 Aires et volumes

Aires

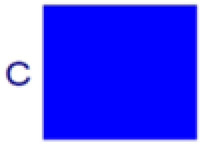
Le rectangle

$A = L \times l$



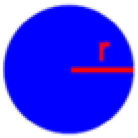
Le carré

$A = c^2$



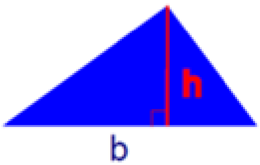
Le disque

$A = \pi \times r^2$



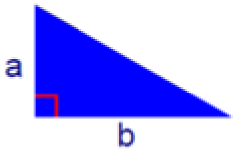
Le triangle

$A = \frac{b \times h}{2}$



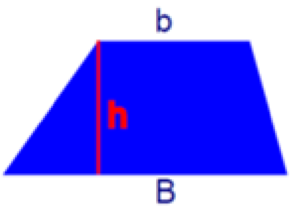
Le triangle rectangle

$A = \frac{a \times b}{2}$



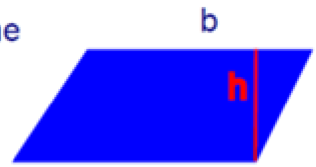
Le trapèze

$A = \frac{(B+b) \times h}{2}$



Le parallélogramme

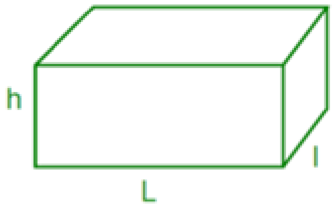
$A = b \times h$



Volumes

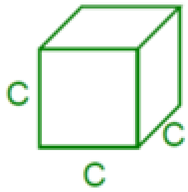
Le pavé droit

$V = L \times l \times h$



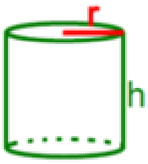
Le cube

$V = c^3$



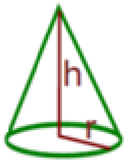
Le cylindre

$V = \pi \times r^2 \times h$



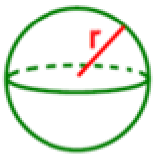
Le cône

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$



La boule

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

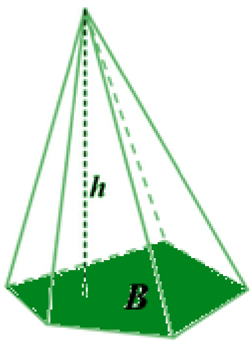


La pyramide

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$

B : aire de base

h : hauteur



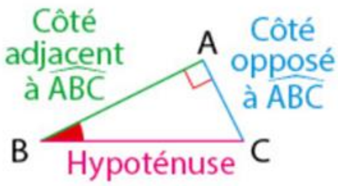
3 Relation trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Rappels

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

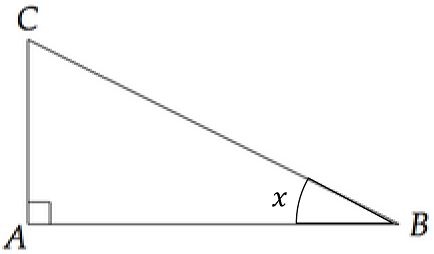
$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$



Pour tout angle x on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Notation : $\cos^2(x)$ signifie $(\cos(x))^2$ c'est à dire $\cos(x) \times \cos(x)$.

<u>Démonstration de la relation cos²(x) + sin²(x) = 1</u>
Soit un triangle ABC rectangle en A.
Soit x l'angle $\widehat{ABC}$.



- On exprime $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

$$\cos(x) = \frac{AB}{BC}$$
$$\sin(x) = \frac{AC}{BC}$$

- On calcule $\cos^2(x) + \sin^2(x)$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

Puisque ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{BC^2}{BC^2} = \mathbf{1}$$