CHAPITRE 3 : Dérivation

CHAPITRE 3 : Dérivation

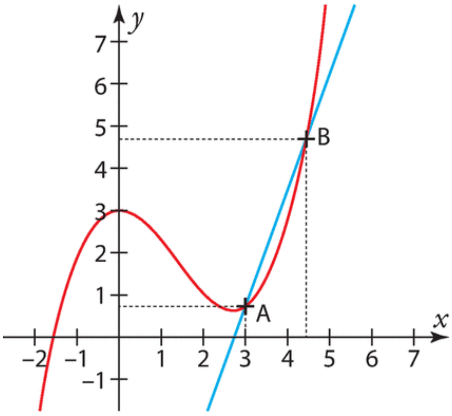
1. Taux de variation

1.1 Taux de variation d'une fonction et pente d'une sécante

Le taux de variation de f entre a et b est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Il correspond au coefficient directeur m de la droite (AB), sécante à la courbe C_f en A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$).

En effet $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Remarque : On peut utiliser la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour un taux de variation en posant $y = f(x)$.

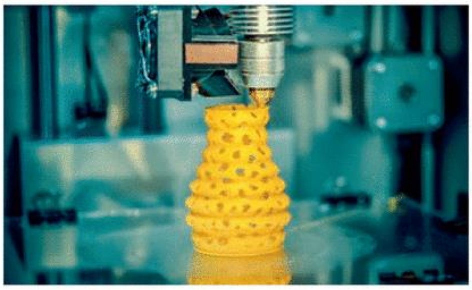
Exemple : Estimer graphiquement le taux de variation entre 3 et 4,5 sur le schéma ci-contre.

1.2 Taux de variation dans la vie courante

1.2.1 Approche économique : taux de variation et accroissement moyen

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;2] par $f(x) = 32x^3 - 90x^2 + 100x$.

Une entreprise a pu modéliser le coût énergétique (en euros) d'une imprimante 3D en fonction du temps d'utilisation (en heures) sur une période de deux heures, par la fonction f.



1. Quel est le coût énergétique pour 2 heures d'utilisation ?
2. Calculer l'accroissement moyen du coût pour chaque demi-heure.
   Peut-on affirmer que l'accroissement du coût énergétique n'a jamais dépassé les 90 €/h ?

(source : Sésamath édition Magnard 2019)

1.2.2 Approche physique : taux de variation et vitesse moyenne

La distance parcourue (en mètre) par un objet lâché sans vitesse initiale en t secondes est :

$$d(t) = \frac{1}{2} \times g \times t^2$$

où g = 9,8 (g est la constante gravitationnelle).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet entre 0,5 s et 0,6 s.

2. Nombre dérivé

2.1 Pente d’une sécante, pente d’une tangente

Si on nomme M le point de la courbe C_f d’abscisse :

$x_M = a + h$ alors lorsqu’on rapproche le point M du point A sur la courbe C_f jusqu’à ce qu’ils soient presque confondus, la sécante ultime (AM) (figure 4) a pour coefficient directeur un nombre appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

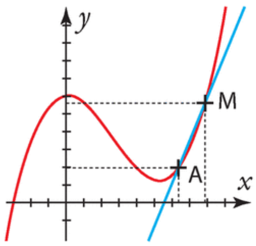


Figure 1

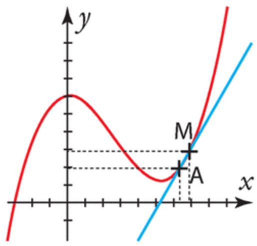


Figure 2

La droite ainsi obtenue s’appelle la tangente à la courbe C_f en a.

La tangente apparait comme la limite des sécantes à la courbe en son point A.

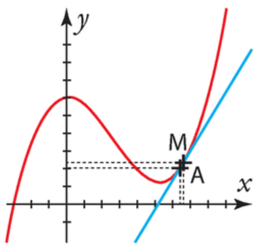


Figure 3

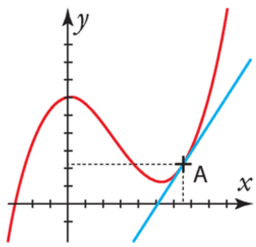


Figure 4

<u>Définition</u>

On appelle **tangente** en A à la courbe $\mathcal{C}_f$ la droite qui passe par $A(a\,;f(a))$ et de **coefficient directeur le nombre dérivé** $f'(a)$.

2.2 Définition du nombre dérivé par le taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Soit $a \in I$ et soit h un réel tel que f soit définie en $x = a + h$

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ correspond au coefficient directeur de la droite (AM) sur les figures de 1 à 3 et vaut :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

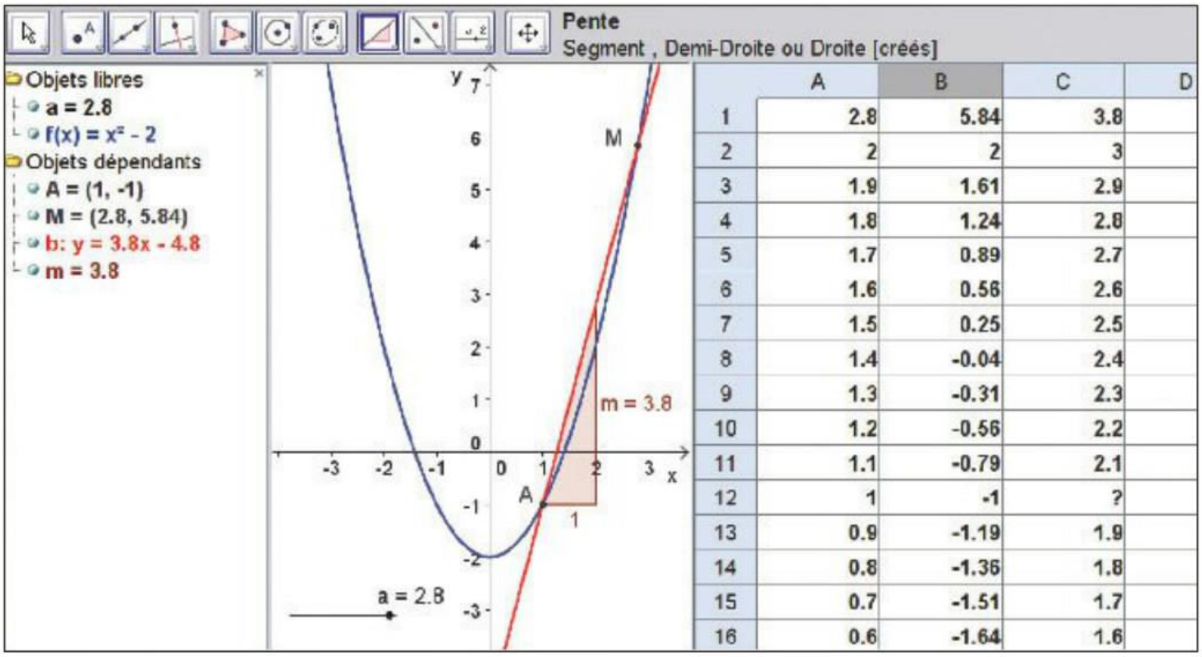
Si la limite quand h tend vers 0 du taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ **est un réel**, alors on dit que cette limite est le nombre dérivé de la fonction f calculé en $x = a$. On le note $f'(a)$ et il correspond au coefficient directeur de la tangente en A (figure 4).

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = f'(a)$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f est **dérivable en $\boldsymbol{x = a}$.**

<u>Remarque :</u> on peut utiliser la notation $\frac{dy}{dx}$ pour $f'(x)$ en posant $y = f(x)$.

2.3 Exemple de recherche du nombre dérivé de *f* en *a*



On a représenté graphiquement la fonction $f: x \longmapsto f(x) = x^2 - 2$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ est défini par :

$$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On observe que pour des valeurs de h très proches de 0 (avec $h \neq 0$), les valeurs de $r(h)$ s'approchent d'une limite réelle. On a donc :

Pour $a = 1$, $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = 2$

On note $f'(1) = 2$

Ce résultat peut être justifié par un calcul :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{((1+h)^2 - 2) - (1^2 - 2)}{h}$$
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + 2h + h^2 - 2) - (-1)}{h}$$
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h + h^2}{h}$$
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(2+h)h}{h}$$
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h \quad pour\ h \neq 0$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = \lim_{h \to 0} (2 + h)$$
$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = 2$$

2.4 Nombre dérivé dans la vie courante

2.4.1 Nombre dérivé et vitesse instantanée

Situation 3 p. 113 du manuel.

2.4.2 Nombre dérivé et coût marginal

Le coût marginal C_m de production mesure la variation du coût total C pour une unité supplémentaire de production. Si on produit x unités, la $(x + 1)$-ième unité coûtera à produire :

$C_m(x) = C(x + 1) - C(x)$

Le coût marginal de production mesure la variation du coût total pour une variation infiniment petite de la quantité produite :

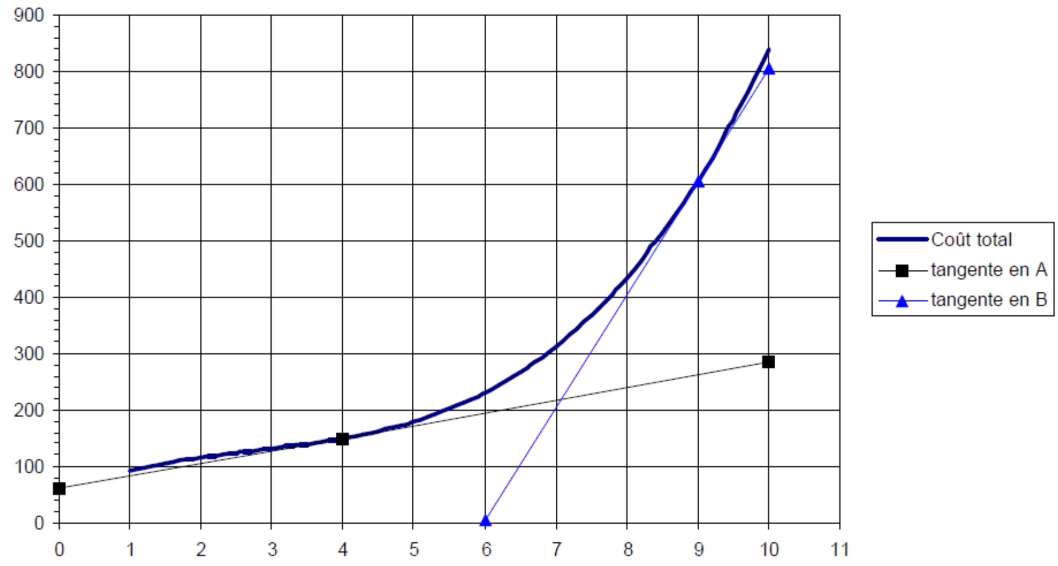
$$C_m(x) = \frac{dC}{dx} = C'(x)$$

Exemple :

On considère que les quantités produites x, en tonnes, peuvent être des réels quelconques de l'intervalle [1 ; 10].

Les coûts de production en euros de l'entreprise CoTon (production de tissu en coton) sont donnés par la formule $C(x) = 1{,}6x^3 - 13{,}4x^2 + 52{,}7 + 50{,}8$.

1. Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C ainsi que les tracés des tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives $x_A = 4$ et $x_B = 9$. Lire sur le graphique une valeur approchée des nombres dérivés $C'(x_A)$ et $C'(x_B)$ à 0,1 près.



2. En déduire le coût marginal pour une production de 4 unités et de 9 unités. Interpréter.

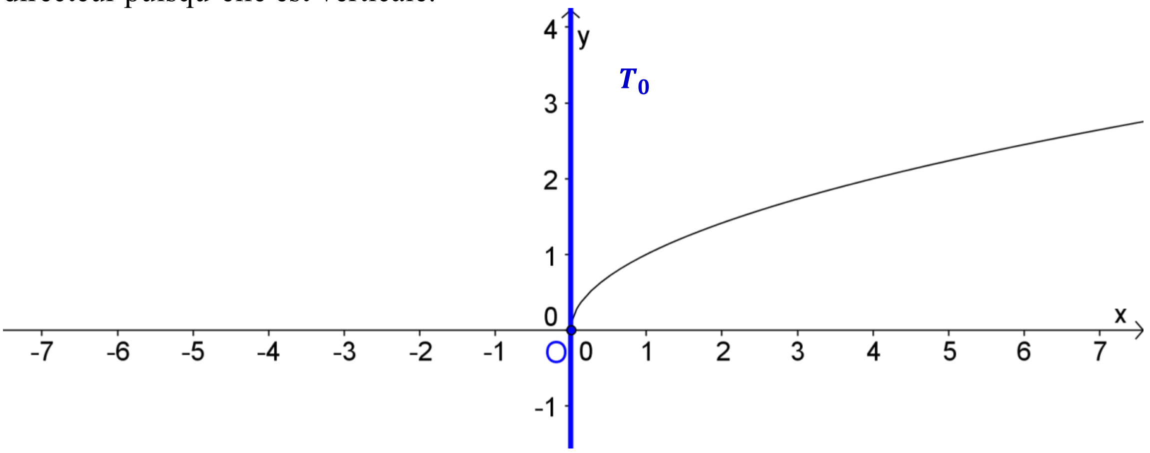
2.5 Exemple de fonction non dérivable en un réel de leur ensemble de définition

Etude de la fonction racine carrée en 0 :

- La fonction racine carrée est définie en $x = 0$. On peut donc étudier sa dérivabilité en $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Cette limite n'est pas un réel, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en $x = 0$.
Graphiquement, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \sqrt{x}$ au point d'abscisse $x = 0$ n'a pas de coefficient directeur puisqu'elle est verticale.



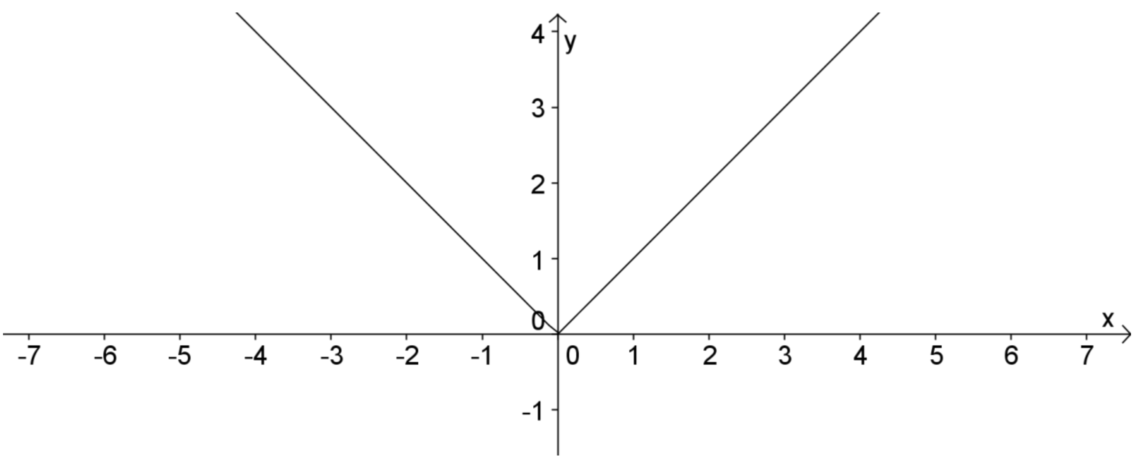
Etude de la fonction valeur absolue en 0 :

Sur un axe gradué, la distance entre x et 0 est notée $|x|$.
Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
Si $x < 0$ alors $|x| = -x$

- La fonction valeur absolue est définie en $x = 0$. On peut donc étudier sa dérivabilité en $x = 0$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \left(\frac{|0+h| - |0|}{h} \right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{h}{h} = 1 \quad ; \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \left(\frac{|0+h| - |0|}{h} \right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1$$

La limite à gauche de 0 est différente de la limite à droite de 0, donc la limite en 0 n'existe pas. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en $x = 0$.
Graphiquement, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = |x|$ au point d'abscisse $x = 0$ n'existe pas



2.6 Calcul d'un nombre dérivé à la calculatrice

Sur TI83

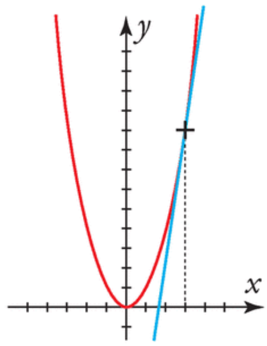
Touche MATH, dans le menu MATH, 8 : nbreDérivé

Exemple :

nbreDérivé(X²-2,X,1) donne 2 c'est-à-dire que pour $f(x) = x^2 - 2$ on a $f'(1) = 2$.

3 Equation réduite d'une tangente

3.1 Exemple



La courbe représentative de la fonction carrée est la parabole *P* ci-contre. On place sur *P* le point A d'abscisse 3.

La tangente en A a pour équation réduite $y = mx + p$ où m=$f'(3)$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = 6+h$$

$$\lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

$M = f'(3) = 6$

$y = 6x + p$

A(3 ;9) ϵ *P* donc $y_A = 6\, x_A + p$

$9 = 6\times 3 + p$

$-9 = p$

La tangente T a pour équation réduite $y = 6x-9$

3.2 Formule de l'équation réduite d'une tangente

Si la fonction f est dérivable en a, alors une équation de la tangente notée T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$ est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Le calcul de l'ordonnée à l'origine p se fait en remplaçant y et x par les coordonnées de A.

Démonstration :

La tangente T à C_f en A d'abscisse a admet $f'(a)$ pour coefficient directeur donc l'équation réduite de la tangente est $y = f'(a)x + p$

A(a ; $f(a)$) ϵ T donc ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente.

$y_A = f'(a)\, x_A + p$

$f(a) = f'(a)\times a + p$

$f(a) - f'(a)\times a = p$

$T : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)\times a$

$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple :

Soit la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 2$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Réponse :
La fonction f étant dérivable en $x = 1$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente T_1 au point A d'équation :
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
On a calculé que $f'(1) = 2$

$$y = 2(x - 1) + f(1)$$

Les coordonnées de A sont $(1\,; -1)$ car $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$y = 2(x-1)-1$

$y = 2x-3$

3.3 Tracer une tangente à la calculatrice

Exemple :

Sur TI83
On trace la courbe d'équation Y1=X²-2 (par exemple avec ZOOM Standard)

Touche 2nd DESSIN, dans le menu DESSIN, 5 :Tangente
Préciser l'abscisse du point de contact en appuyant sur **1** puis ENTREE

3.4 Lecture graphique d'une équation réduite de tangente

La lecture du coefficient directeur d'une droite tangente à un point $A(a\,; f(a))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ donne directement $f'(a)$ (ou une valeur approchée).

3.5 A partir d'une équation de la tangente au point d'abscisse *a*, retrouver *f* (*a*) et *f '* (*a*)

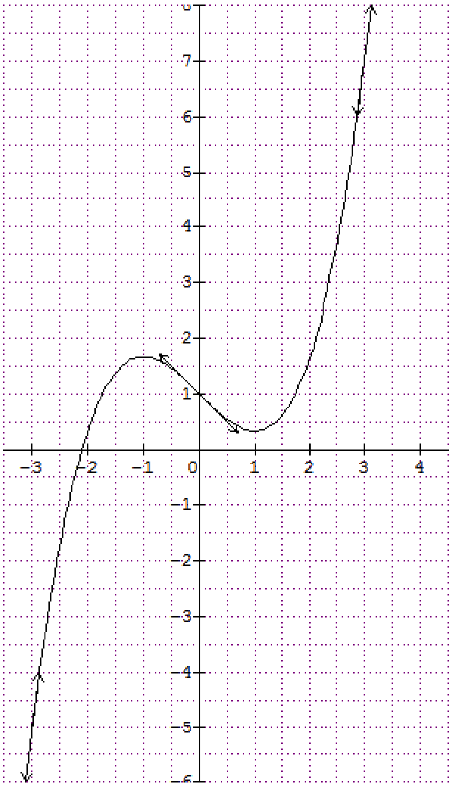
Si la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation $y = mx + p$, il est possible de remplacer x par l'abscisse du point A. La valeur de y correspondante est l'ordonnée de A puisque A appartient à la tangente T_a. Cette ordonnée est aussi $f(a)$ car le point A appartient aussi à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Quant à $f'(a)$, il est égal au coefficient directeur de la tangente.

Exemple :
La tangente T_2 à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2 a pour équation $y = 11x - 15$
Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.

Réponse :
$f(2) = 11 \times 2 - 15$ $f(2) = 7$ et $f'(2) = 11$

3.6 Tracer une courbe possible à partir d'images et de nombres dérivés

- On place les points correspondant aux images connues
- On trace des petites tangentes (double flèches) de coefficients directeurs égaux aux nombres dérivés.



Exemple :
Tracer une courbe $\mathcal{C}_f$ possible correspondant aux données suivantes :

$$f(-3) = -5 \qquad f'(-3) = 8$$
$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1$$
$$f(3) = 7 \qquad f'(3) = 8$$

4 Fonction dérivée

4.1 Définition

Si une fonction f est dérivable en tout réel a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

4.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	$\boldsymbol{f}$	**Définie sur…**	**Dérivable sur…**	$\boldsymbol{f'}$
Constante	$f(x) = b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
linéaire	$f(x) = mx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Affine	$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
Puissance n$\in \mathbb{N}^*$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Démonstration de la fonction dérivée de la fonction carrée :</u>

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel et h un réel non nul.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

Quel que soit le réel a, si h tend vers 0 alors le taux de variation entre a et $a + h$ tend vers $2a$. cela signifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est la fonction qui à tout réel x associe $f'(x)=2x$.

Démonstration de la dérivée de la fonction inverse :

Soit la fonction inverse f définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit a et h deux réels non nuls tels que $a+h$ soit non nul.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=\frac{-h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Quel que soit le réel non nul a, si h tend vers 0 alors le taux de variation entre a et $a + h$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$ Cela signifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$et sa fonction dérivée f' est la fonction qui à tout réel x non nul associe

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

5 Dérivées et opérations

5.1 $(u + v)'$

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2+5$

- f est la somme de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x)=3x^2+2x$

5.2 $(ku)'$

Si u est une fonction dérivable sur I et k est une constante réelle alors ku est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2$
- $f'(x)=x^2$

5.3 $(uv)'$

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^3\sqrt{x}$

- f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $f'(x)=3x^2\sqrt{x}+x^3\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque :

Ce théorème assure que uv est dérivable sur I. Mais la fonction peut être aussi dérivable ailleurs.
Pour le savoir, il faut utiliser la définition du nombre dérivé.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
Est-elle dérivable en $x = 0$?

Réponse :

On calcule $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right)$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(0+h)^3\sqrt{0+h}-(0)^3\sqrt{0}}{h}$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^3\sqrt{h}}{h} = h^2\sqrt{h}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0} h^2\sqrt{h} = 0$. La limite est un réel. Donc f est aussi dérivable en 0. Donc, au total, f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration du théorème sur la dérivée d'un produit :

Hypothèses : les fonctions u et v sont dérivables en un réel a d'un intervalle I.

- On exprime le taux d'accroissement de la fonction uv entre a et $a+h$

$$r(h) = \frac{uv(a+h) - uv(a)}{h}$$

$$r(h) = \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a)}{h}$$

- On ajoute au numérateur l'expression nulle $\boldsymbol{u(a)\times v(a+h) - u(a)\times v(a+h)}$

$$r(h) = \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a) + \boldsymbol{u(a)\times v(a+h) - u(a)\times v(a+h)}}{h}$$

- On fait apparaitre le taux d'accroissement de u entre a et $a+h$ ainsi que le taux d'accroissement de v entre a et $a+h$

$$r(h) = \frac{u(a+h)\times v(a+h) - \boldsymbol{u(a)\times v(a+h)} + \boldsymbol{u(a)\times v(a+h)} - u(a)\times v(a)}{h}$$

$$r(h) = \frac{[u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}]\times \boldsymbol{v(a+h)} + \boldsymbol{u(a)}\times[\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)]}{h}$$

- On sépare en deux fractions

$$r(h) = \frac{[u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}]\times \boldsymbol{v(a+h)}}{h} + \frac{\boldsymbol{u(a)}\times[\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)]}{h}$$

$$r(h) = \frac{[u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}]}{h}\times \boldsymbol{v(a+h)} + \boldsymbol{u(a)}\times\frac{[\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)]}{h}$$

- On calcule $\lim\limits_{h\to 0} r(h)$

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{[u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}]}{h} \times \lim_{h\to 0} \boldsymbol{v(a+h)} + \lim_{h\to 0} \boldsymbol{u(a)} \times \lim_{h\to 0} \frac{[\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)]}{h}$$

- On utilise les hypothèses :
  u est dérivable en a donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{[u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}]}{h} = u'(a)$
  v est dérivable en a donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{[\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)]}{h} = v'(a)$

D'où :

$$\lim_{h\to 0} r(h) = u'(a) \times \lim_{h\to 0} \boldsymbol{v(a+h)} + \lim_{h\to 0} \boldsymbol{u(a)} \times v'(a)$$

Enfin, comme $\lim\limits_{h\to 0} \boldsymbol{v(a+h)} = \boldsymbol{v(a)}$**,** on a :
$\lim\limits_{h\to 0} r(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$ est un réel.

<u>Conclusion :</u>

- La fonction uv est dérivable en a
- Le nombre dérivé de la fonction uv en a est $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$
- Cette démonstration a été faite pour tout réel a d'un intervalle I :

donc si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors leur produit uv est une fonction dérivable sur I et sa dérivée est $u'v + uv'$

5.4 (u²)'

Si u est une fonction dérivable sur I alors u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$

<u>Exemple :</u>
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 5x - 3)^2$

- f est le carré d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f'(x) = 2(x^3 + 2x^2 + 5x - 3)(3x^2 + 4x + 5)$

5.5 (1/*u*)'

Si u est une fonction dérivable et non nulle sur I alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

<u>Exemple :</u>
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3x^2+5}$

- $f = \frac{1}{u}$ et u est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = -\frac{6x}{(3x^2+5)^2}$

5.6 (*u/v*)'

Si u est une fonction dérivable sur I et si v est une fonction dérivable et non nulle sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+5}$

- $f = \frac{u}{v}$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = \frac{3x^2(3x^2+5)-x^3(6x)}{(3x^2+5)^2}$
- $f'(x) = \frac{3x^2[(3x^2+5)-x(2x)]}{(3x^2+5)^2}$
- $f'(x) = \frac{3x^2[x^2+5]}{(3x^2+5)^2}$

5.7 Dérivée de $g(mx+p)$

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout x réel tel que $mx+p$ appartient à I, la fonction f définie par $f(x)=g(ms+p)$ est dérivable et $f'(x)=mg'(mx+p)$

Exemple :

Soit h la fonction définie sur $[2{,}5\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{2x-5}$.

La fonction h est dérivable sur $]2{,}5\ ;\ -\infty[$.

$h(x)=f(2x-5)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$

$h'(x)=2f'(2x-5)$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $h'(x)=2\times \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$

6. Recherche du point de contact entre *C* et *T*

Si on connait $f(x)$ alors on peut trouver en quel(s) points de la courbe $\mathcal{C}_f$ le coefficient directeur de la (ou des) tangente(s) est, par exemple, égal à 3.
Il suffit de calculer $f'(x)$ et de chercher les éventuelles solutions de l'équation $f'(x) = 3$. Si on trouve des solutions, alors ce sont les abscisses des points de contact entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses tangentes de coefficient directeur 3.

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

Y a-t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente a comme coefficient directeur 3 ?

Réponse :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 1$$
$$f'(x) = x^2 - 1$$

On résout :

$$f'(x) = 3$$
$$x^2 = 4$$

Donc les solutions sont $x = 2$ ou $x = -2$

Il y a deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente a comme coefficient directeur 3 : Le point A d'abscisse 2 et le point B d'abscisse -2.

7. Déterminer une équation de tangente parallèle à une droite donnée

La tangente d'équation $y = f'(a)x + p$ est parallèle à une droite donnée de coefficient directeur m si et seulement si $f'(a) = m$. Cette question se résout donc comme celle du paragraphe 4.7 précédent.

8. Position relative de *C* et *T*

Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T_a d'équation $y = f'(a)x + p$ revient à étudier le signe de différence $f(x) - (f'(a)x + p)$

- Si, pour tout $x \in I$, $\quad f(x) - (f'(a)x + p) > 0$
  $f(x) > (f'(a)x + p)$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_a

- Si, pour tout $x \in I$, $\quad f(x) - (f'(a)x + p) < 0$
  $f(x) < (f'(a)x + p)$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente T_a

9. Déterminer *f* (*x*) avec des données

La connaissance de renseignements tels que $valeur\ de\ la\ fonction$ pour certains points ou $valeur\ de\ la\ dérivée$ pour certains points, permet de déterminer des inconnues $a\ b\ c\ \dots$ figurant dans $f(x)$. Il faut autant d'équations indépendantes que d'inconnues à déterminer.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
On sait que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points $I(-3\ ;\ -5)$ et $J(0\ ;\ 1)$. De plus, on sait que $f'(-3) = 8$ et que $f'(0) = -1$.
Déterminer les quatre réels a, b, c, d

Méthode
Il faut calculer $f'(x)$ pour utiliser les renseignements $f'(-3) = 8$ et $f'(0) = -1$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Donc $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (car $a\ b\ c$ et d sont des constantes réelles).

$\begin{cases} f(-3) = -5 \\ f(0) = 1 \\ f'(-3) = 8 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$ équivaut successivement à :

$$\begin{cases} a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + d = -5 \\ a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 1 \\ 3a(-3)^2 + 2b(-3) + c = 8 \\ 3a(0)^2 + 2b(0) + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = -5 \\ d = 1 \\ 27a - 6b + c = 8 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27a + 9b + 3 + 1 = -5 \\ d = 1 \\ 27a - 6b - 1 = 8 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27a + 9b = -9 \\ d = 1 \\ 27a - 6b = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27a + 9b = -9 \\ d = 1 \\ 27a - 6b = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -27a + 9b + (27a - 6b) = -9 + 9 \\ d = 1 \\ 27a - 6b = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b = 0 \\ d = 1 \\ 27a - 6b = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \\ 27a = 9 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \\ a = \dfrac{1}{3} \\ c = -1 \end{cases}$$

On en déduit que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ vérifie les quatre conditions.