CHAPITRE 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

[1 Probabilité conditionnelle 2](#_Toc17390262)

[1.1 Probabilité de B sachant A 2](#_Toc17390263)

[1.2 Propriétés 3](#_Toc17390264)

[2 Utilisation d’un arbre pondéré 7](#_Toc17390265)

[2.1 Règles de calculs dans un arbre pondéré 7](#_Toc17390266)

[2.2 Formule des probabilités totales 8](#_Toc17390267)

[2.2.1 Partition d'un ensemble 8](#_Toc17390268)

[2.2.2 Formule des probabilités totales 8](#_Toc17390269)

[3 Indépendance 9](#_Toc17390270)

[3.1 Evènements indépendants 9](#_Toc17390271)

[3.2 Succession de deux épreuves indépendantes 10](#_Toc17390272)

CHAPITRE 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

# Probabilité conditionnelle

## Probabilité de B sachant A

On considère une expérience aléatoire et deux évènements et avec .

La probabilité de , sachant que est réalisé, est notée , et :

***Exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On peut calculer :

* Directement en considérant comme univers l’ensemble des 150 filles :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* Ou utilisant la définition de la probabilité conditionnelle :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | avec |  | et |  | Soit |  |

## Propriétés

* **Propriété 1**

On considère une expérience aléatoire et deux évènements et avec .

La probabilité de , sachant que est réalisé, est notée , et :

Donc :

Après simplification :

***Illustration de la propriété 1 sur l'exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On a :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | et |  |

D'une part

D'autre part

On a donc bien .

* **Propriété 2**

On considère une expérience aléatoire et deux évènements et avec .

La probabilité de , sachant que est réalisé, est notée , et :

Donc :

Après simplification :

***Illustration de la propriété 2 sur l'exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On a :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | et |  |

D'une part

D'autre part

On a donc bien

* **Propriété 3**

On a (propriété 1)

On a aussi (propriété 2).

Donc :

***Illustration de la propriété 3 sur l'exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On a :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | et |  |

et aussi :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | et |  |

D'une part

D'autre part

On a donc bien

* **Propriété 4**

***Illustration de la propriété 4 sur l'exemple*** : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 50 | 50 | 100 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 80 | 170 | 250 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On a calculé la probabilité que l'élève soit une fille sachant que l'élève fait de l'allemand et on a trouvé :

Donc, en appliquant la propriété 4, on a :

Et, en effet, cela est bien égal à la probabilité que l'élève soit un garçon sachant que l'élève fait de l'allemand :

# *arbre p2.jpg*Utilisation d’un arbre pondéré

## Règles de calculs dans un arbre pondéré

***Exemple :***

Le chemin en gras représente l'évènement

***Règles pratiques*** :

* La somme des probabilités affectées aux branches issues d’un même nœud est égale à 1.
* La probabilité d’un résultat est égale au produit des probabilités qui conduisent à ce résultat.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

## Formule des probabilités totales

### Partition d'un ensemble

Dire que les évènements forment **une partition** de l’univers signifie que :

* Aucun des évènements n'a une probabilité nulle.
* Les évènements sont deux à deux incompatibles[[1]](#footnote-1).
* Leur réunion est l’univers .

*Une partition de* Ω

### Formule des probabilités totales

Si les évènements forment une partition de l’univers, la probabilité d’un évènement quelconque est :





L'évènement est ici représenté par la réunion des trois chemins en gras.

# Indépendance

## Evènements indépendants

Deux évènements et sont indépendants lorsque la probabilité de l’un ne dépend pas de la réalisation de l’autre, soit :

***Conséquence***:

Deux évènements et sont **indépendants** lorsque

***Démonstration***:

 équivaut successivement à :

* **Propriété 5 :**

Si et sont indépendants alors et sont aussi indépendants.

Autrement dit :

Si alors

***Exemple*** : On modifie les données de l'exemple avec les élèves qui font de l'allemand ou de l'espagnol.

Les nouvelles données sont :

Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Allemand | Espagnol | TOTAL |
| Garçons | 10 | 40 | 50 |
| Filles | 30 | 120 | 150 |
| TOTAL | 40 | 160 | 200 |

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements :  :  « l’élève étudie l’allemand »

  : «  l’élève est une fille ».

On peut calculer :

* Directement en considérant comme univers l’ensemble des 150 filles :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

On peut aussi calculer

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

On a donc :

Selon la définition, on peut dire que les événements "L'élève fait de l'allemand" et "L'élève est une fille" sont indépendants.

L'explication est que la proportion d'élèves qui font de l'allemand chez les filles est et la proportion d'élèves qui font de l'allemand chez les garçons est aussi. Donc la probabilité que l'élève fasse de l'allemand sachant que c'est une fille est la même que la probabilité qu'un élève fasse de l'allemand. L'événement ne dépend pas de (et réciproquement ne dépend pas de ).

## Succession de deux épreuves indépendantes

* **Définition**

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes.

***Exemple :***

On tire au hasard successivement avec remise deux cartes dans un jeu de cartes et on note les cartes obtenues.

Dans cet énoncé, il y a l'hypothèse "avec remise" donc les deux tirages sont indépendants. En effet, puisqu'il y a remise de la première carte, la composition du paquet ne dépend pas de la première carte tirée lorsqu'on tire la deuxième carte.

* **Propriété 6 :**

La probabilité d'avoir un certain couple lors de deux épreuves indépendantes est égal au produit des probabilités .

***Exemple :***

La probabilité d'avoir le couple lorsqu'on lance deux fois un dé est égal à

1. Deux évènements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide. On dit aussi évènements " disjoints ". [↑](#footnote-ref-1)