CHAPITRE 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

CHAPITRE 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Probabilité de B sachant A

On considère une expérience aléatoire et deux évènements A et B avec $p(A) \neq 0$.

La probabilité de B, sachant que A est réalisé, est notée $P_A(B)$, et :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Exemple : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On peut calculer $P_F(A)$:

- Directement en considérant comme univers l'ensemble des 150 filles :

$$P_F(A) = \frac{30}{150} \qquad \boxed{P_F(A) = \frac{1}{5}}$$

- Ou utilisant la définition de la probabilité conditionnelle :

$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)}$ avec $P(A \cap F) = \frac{30}{250}$ et $P(F) = \frac{150}{250}$ Soit $\boxed{P_F(A) = \frac{30}{250} \times \frac{250}{150} = \frac{1}{5}}$

1.2 Propriétés

- **Propriété 1**

On considère une expérience aléatoire et deux évènements A et B avec $p(A) \neq 0$.

La probabilité de B, sachant que A est réalisé, est notée $P_A(B)$, et :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donc :

$$P(A) \times P_A(B) = P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Après simplification :

$$\boxed{P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)}$$

<u>Illustration de la propriété 1 sur l'exemple</u> : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On a :

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)}$$

$P(F) = \dfrac{150}{250} = \dfrac{3}{5}$ $\quad$ $P(A \cap F) = \dfrac{3}{25}$ et $P_F(A) = \dfrac{1}{5}$

D'une part $P(F) \times P_F(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$

D'autre part $P(A \cap F) = \frac{3}{25}$

On a donc bien $P(F) \times P_F(A) = P(A \cap F)$.

- **Propriété 2**

On considère une expérience aléatoire et deux évènements A et B avec $p(A) \neq 0$.

La probabilité de A, sachant que B est réalisé, est notée $P_B(A)$, et :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donc :

$$P(B) \times P_B(A) = P(B) \times \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Après simplification :

$$\boxed{P(B) \times P_B(A) = P(A \cap B)}$$

<u>Illustration de la propriété 2 sur l'exemple</u> : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On a :

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)}$$

$P(A) = \frac{80}{250} = \frac{8}{25}$ $\qquad P(A \cap F) = \frac{3}{25}$ et $P_A(F) = \frac{30}{80}$

D'une part $P(A) \times P_A(F) = \frac{8}{25} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{25}$

D'autre part $P(A \cap F) = \frac{3}{25}$

On a donc bien $P(A) \times P_A(F) = P(A \cap F)$

- **Propriété 3**

On a $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$ (propriété 1)

On a aussi $P(B) \times P_B(A) = P(A \cap B)$ (propriété 2).

Donc :

$$\boxed{P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)}$$

<u>Illustration de la propriété 3 sur l'exemple</u> : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On a :

$$P(A) = \frac{80}{250} = \frac{8}{25} \quad \text{et} \quad P_A(F) = \frac{3}{8}$$

et aussi :

$$P(F) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad P_F(A) = \frac{3}{15}$$

D'une part $P(A) \times P_A(F) = \frac{8}{25} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{25}$

D'autre part $P(F) \times P_F(A) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = \frac{3}{25}$

On a donc bien $P(A) \times P_A(F) = P(F) \times P_F(A)$

- **Propriété 4**

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

<u>Illustration de la propriété 4 sur l'exemple</u> : Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	50	50	100
Filles	30	120	150
TOTAL	80	170	250

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l’élève étudie l’allemand »

F : « l’élève est une fille ».

On a calculé la probabilité que l'élève soit une fille sachant que l'élève fait de l'allemand et on a trouvé :

$$P_A(F) = \frac{3}{8}$$

Donc, en appliquant la propriété 4, on a :

$$P_A(\bar{F}) = 1 - \frac{3}{8}$$

$$P_A(\bar{F}) = \frac{5}{8}$$

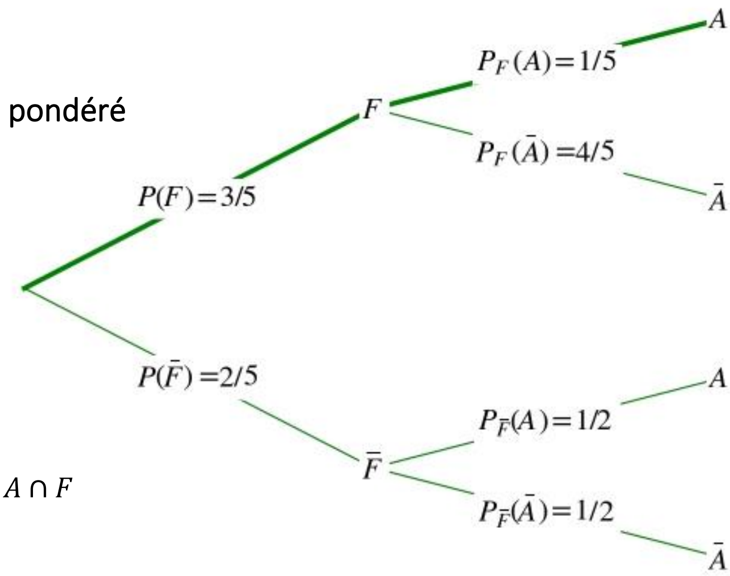
Et, en effet, cela est bien égal à la probabilité que l'élève soit un garçon sachant que l'élève fait de l'allemand :

$$P_A(G) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$$

2 Utilisation d’un arbre pondéré

2.1 Règles de calculs dans un arbre pondéré

<u>Exemple :</u>



$P(\bar{F}) = 1 - P(F)$

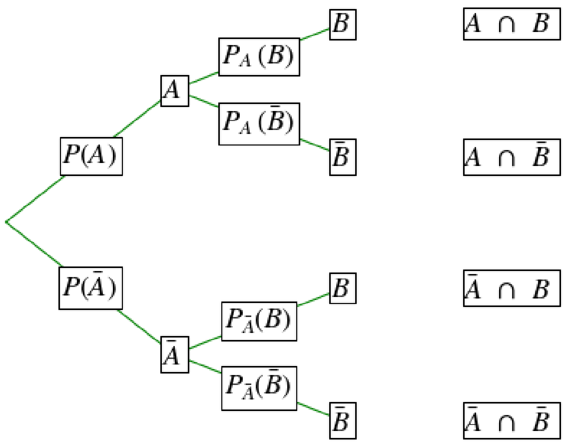
$P(\bar{F}) = 1 - \frac{3}{5}$ $\qquad$ $P(\bar{F}) = \frac{2}{5}$

Le chemin en gras représente l'évènement $A \cap F$

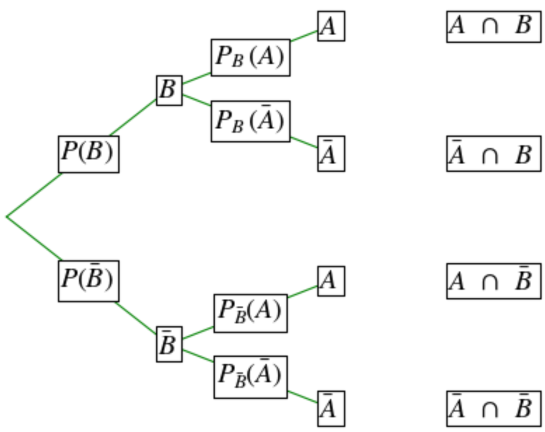
<u>Règles pratiques</u> :

- La somme des probabilités affectées aux branches issues d’un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d’un résultat est égale au produit des probabilités qui conduisent à ce résultat.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$



$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$



2.2 Formule des probabilités totales

2.2.1 Partition d'un ensemble

Dire que les évènements B_1 , B_2, … , B_n forment **une partition** de l'univers signifie que :

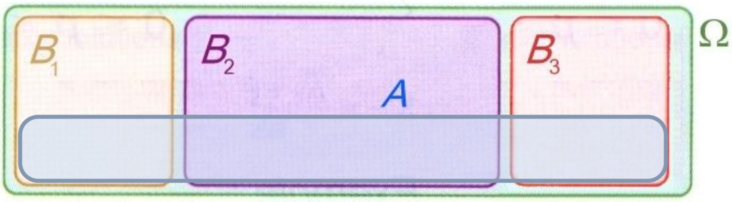
- Aucun des évènements B_1 , B_2, … , B_n n'a une probabilité nulle.
- Les évènements B_1 , B_2, … , B_n sont deux à deux incompatibles[1].
- Leur réunion est l'univers Ω.

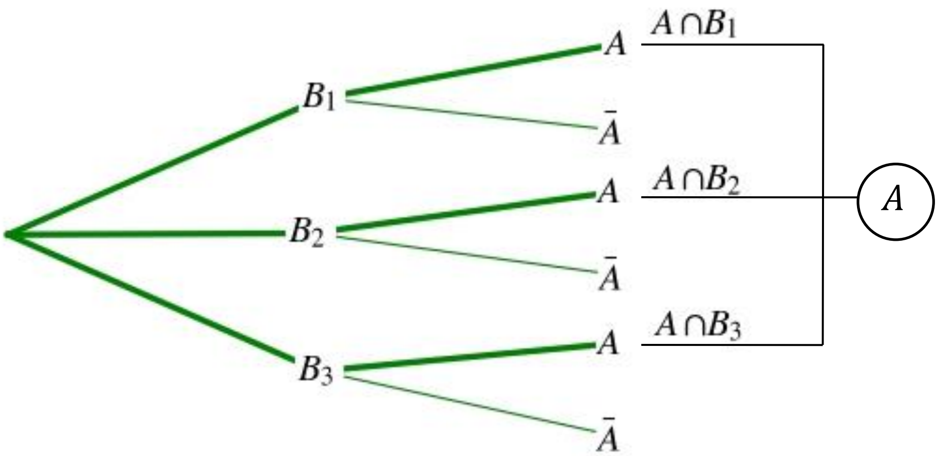
Une partition de Ω

2.2.2 Formule des probabilités totales

Si les évènements B_1 , B_2, … , B_n forment une partition de l'univers, la probabilité d'un évènement quelconque A est :

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)}$$





L'évènement A est ici représenté par la réunion des trois chemins en gras.

[1] Deux évènements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide. On dit aussi évènements " disjoints ".

3 Indépendance

3.1 Evènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre, soit :

$$P_A(B) = P(B) \qquad ou \qquad P_B(A) = P(A)$$

Conséquence :

Deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Démonstration :

$P_B(A) = P(A)$ équivaut successivement à :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- **Propriété 5 :**

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Autrement dit :

Si $P_B(A) = P(A)$ alors $P_B(\bar{A}) = P(\bar{A})$

Exemple : On modifie les données de l'exemple avec les élèves qui font de l'allemand ou de l'espagnol.

Les nouvelles données sont :

Dans un lycée, les 250 élèves qui étudient une seconde langue se répartissent selon le tableau suivant :

	Allemand	Espagnol	TOTAL
Garçons	10	40	50
Filles	30	120	150
TOTAL	40	160	200

On choisit un élève au hasard.

On considère les évènements : A : « l'élève étudie l'allemand »

F : « l'élève est une fille ».

On peut calculer $P_F(A)$:

- Directement en considérant comme univers l’ensemble des 150 filles :

$$P_F(A) = \frac{30}{150} \qquad \boxed{P_F(A) = \frac{1}{5}}$$

On peut aussi calculer $P(A)$:

$$P(A) = \frac{40}{200} \qquad \boxed{P(A) = \frac{1}{5}}$$

On a donc :

$$P_F(A) = P(A)$$

Selon la définition, on peut dire que les événements "L'élève fait de l'allemand" et "L'élève est une fille" sont indépendants.

L'explication est que la proportion d'élèves qui font de l'allemand chez les filles est $\frac{30}{150} = \frac{1}{5}$ et la proportion d'élèves qui font de l'allemand chez les garçons est $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ aussi. Donc la probabilité que l'élève fasse de l'allemand sachant que c'est une fille est la même que la probabilité qu'un élève fasse de l'allemand. L'événement A ne dépend pas de F (et réciproquement F ne dépend pas de A).

3.2 Succession de deux épreuves indépendantes

- **Définition**

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple :

On tire au hasard successivement avec remise deux cartes dans un jeu de cartes et on note les cartes obtenues.

Dans cet énoncé, il y a l'hypothèse "avec remise" donc les deux tirages sont indépendants. En effet, puisqu'il y a remise de la première carte, la composition du paquet ne dépend pas de la première carte tirée lorsqu'on tire la deuxième carte.

- **Propriété 6 :**

La probabilité d'avoir un certain couple $(a\,;b)$ lors de deux épreuves indépendantes est égal au produit des probabilités $P(a) \times P(b)$.

Exemple :

La probabilité d'avoir le couple $(3; 4)$ lorsqu'on lance deux fois un dé est égal à $P(3) \times P(4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$