CHAPITRE 3 : Dérivation

[1. Taux de variation 2](#_Toc24951963)

[2. Nombre dérivé 3](#_Toc24951964)

[2.1 Pente d’une sécante, pente d’une tangente 3](#_Toc24951965)

[2.2 Définition du nombre dérivé par le taux de variation 3](#_Toc24951966)

[2.6 Calcul d’un nombre dérivé à la calculatrice 7](#_Toc24951967)

[3 Equation réduite d’une tangente 7](#_Toc24951968)

[3.2 Formule de l’équation réduite d’une tangente 7](#_Toc24951969)

[3.3 Tracer une tangente à la calculatrice 8](#_Toc24951970)

[3.4 Lecture graphique d’une équation réduite de tangente 8](#_Toc24951971)

[3.5 A partir d’une équation de la tangente au point d’abscisse *a*, retrouver *f* (*a*) et *f ’* (*a*) 8](#_Toc24951972)

[3.6 Tracer une courbe possible à partir d’images et de nombres dérivés 9](#_Toc24951973)

[4 Fonction dérivée 9](#_Toc24951974)

[4.1 Définition 9](#_Toc24951975)

[4.2 Dérivées des fonctions usuelles 9](#_Toc24951976)

[*Démonstration de la fonction dérivée de la fonction carrée :* 9](#_Toc24951977)

[5 Dérivées et opérations 10](#_Toc24951978)

[5.1 (*u* + *v*)’ 10](#_Toc24951979)

[5.2 (*ku*)’ 10](#_Toc24951980)

[5.3 (*uv*)’ 10](#_Toc24951981)

[5.4 (u²)’ 12](#_Toc24951982)

[5.5 (1/*u*)’ 12](#_Toc24951983)

[5.6 (*u/v*)’ 12](#_Toc24951984)

[6. Recherche du point de contact entre *C* et *T* 13](#_Toc24951985)

[7. Déterminer une équation de tangente parallèle à une droite donnée 14](#_Toc24951986)

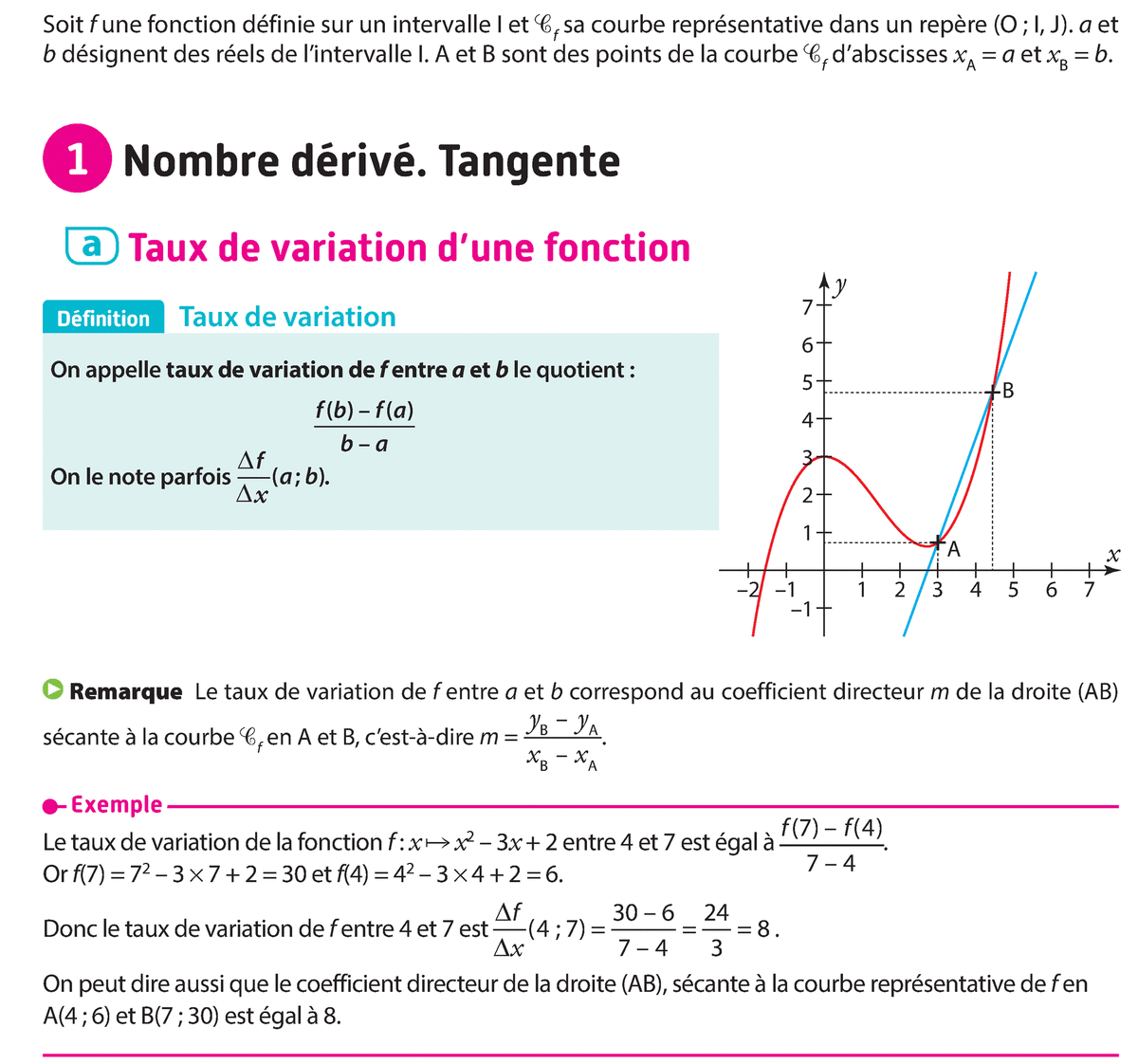
[8. Position relative de *C* et *T* 14](#_Toc24951987)

[9. Déterminer *f* (*x*) avec des données 14](#_Toc24951988)

CHAPITRE 3 : Dérivation

# Taux de variation

* 1. **Taux de variation d’une fonction et pente d’une sécante**

Le taux de variation de *f* entre *a* et *b* est

Il correspond au coefficient directeur *m* de la droite (AB), sécante à la courbe C*f* en A(*a* ; *f*(*a*)) et B(*b* ; *f*(*b*)).

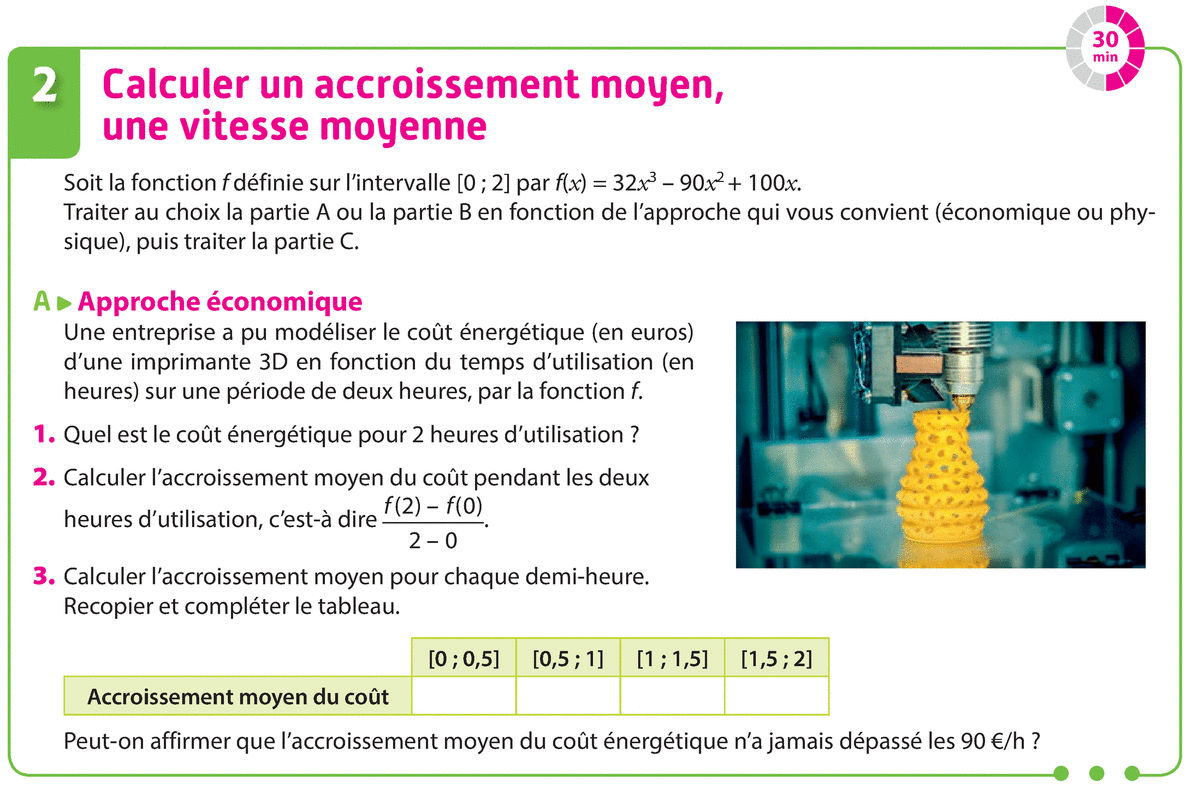
En effet

*Remarque :* On peut utiliser la notation pour un taux de variation en posant *y* = *f*(*x*).

*Exemple :* Estimer graphiquement le taux de variation entre 3 et 4,5 sur le schéma ci-contre.

* 1. **Taux de variation dans la vie courante**
     1. **Approche économique : taux de variation et accroissement moyen**

Soit la fonction *f* définie sur l’intervalle [0 ;2] par .

Une entreprise a pu modéliser le coût énergétique (en euros) d’une imprimante 3D en fonction du temps d’utilisation (en heures) sur une période de deux heures, par la fonction *f*.

1. Quel est le coût énergétique pour 2 heures d’utilisation ?
2. Calculer l’accroissement moyen du coût pour chaque demi-heure.

Peut-on affirmer que l’accroissement du coût énergétique n’a jamais dépassé les 90 €/h ?

*(source : Sésamath édition Magnard 2019)*

* + 1. **Approche physique : taux de variation et vitesse moyenne**

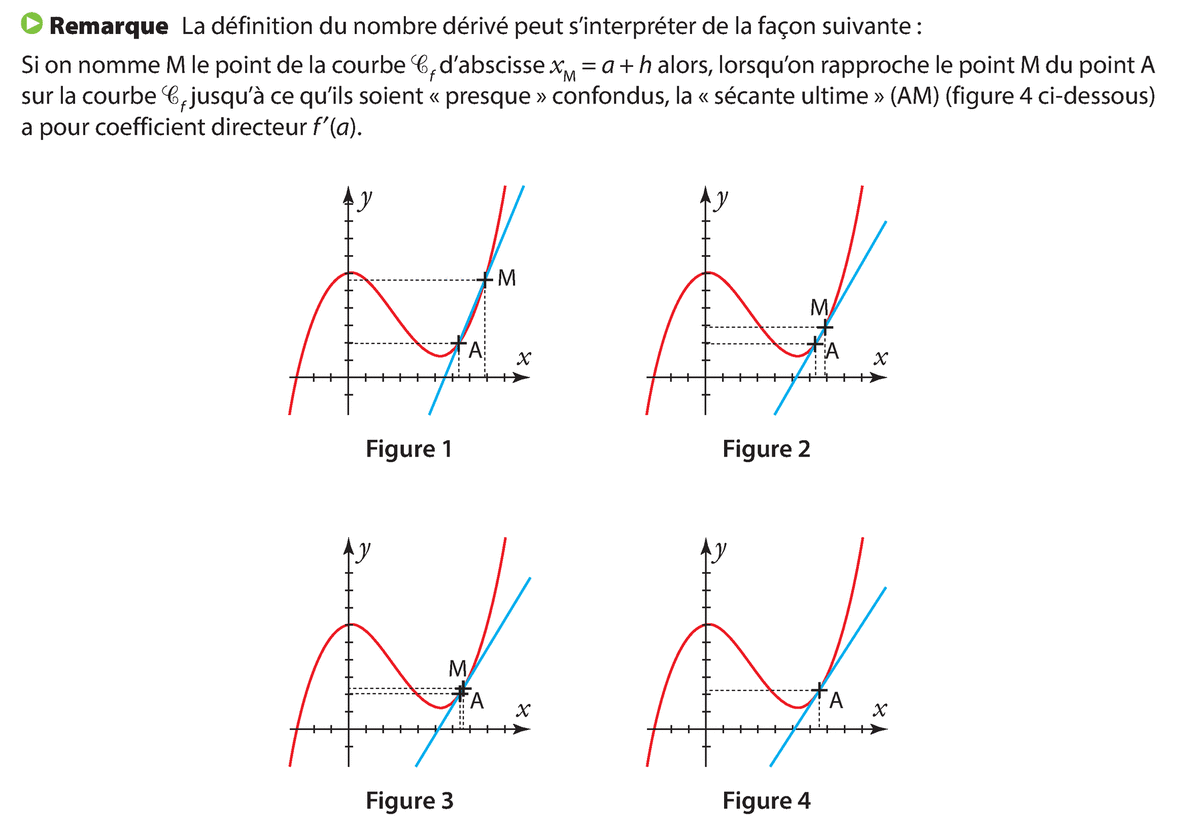
La distance parcourue (en mètre) par un objet lâché sans vitesse initiale en *t* secondes est :

où *g* = 9,8 (*g* est la constante gravitationnelle).

Calculer la vitesse moyenne de l’objet entre 0,5 s et 0,6 s.

# Nombre dérivé

## Pente d’une sécante, pente d’une tangente



Si on nomme M le point de la courbe C*f*d’abscisse :

*x*M = *a* + *h* alors lorsqu’on rapproche le point M du point A sur la courbe C*f* jusqu’à ce qu’ils soient presque confondus, la sécante ultime (AM) (figure 4) a pour coefficient directeur un nombre appelé nombre dérivé de *f* en *a* et noté *f’*(*a*).

La droite ainsi obtenue s’appelle la tangente à la courbe C*f* en *a*.

La tangente apparait comme la limite des sécantes à la courbe en son point A.

***Définition***

On appelle **tangente** en à la courbe la droite qui passe par et de **coefficient directeur le nombre dérivé** .

## Définition du nombre dérivé par le taux de variation

Soit une fonction définie sur un intervalle

Soit et soit un réel tel que soit définie en

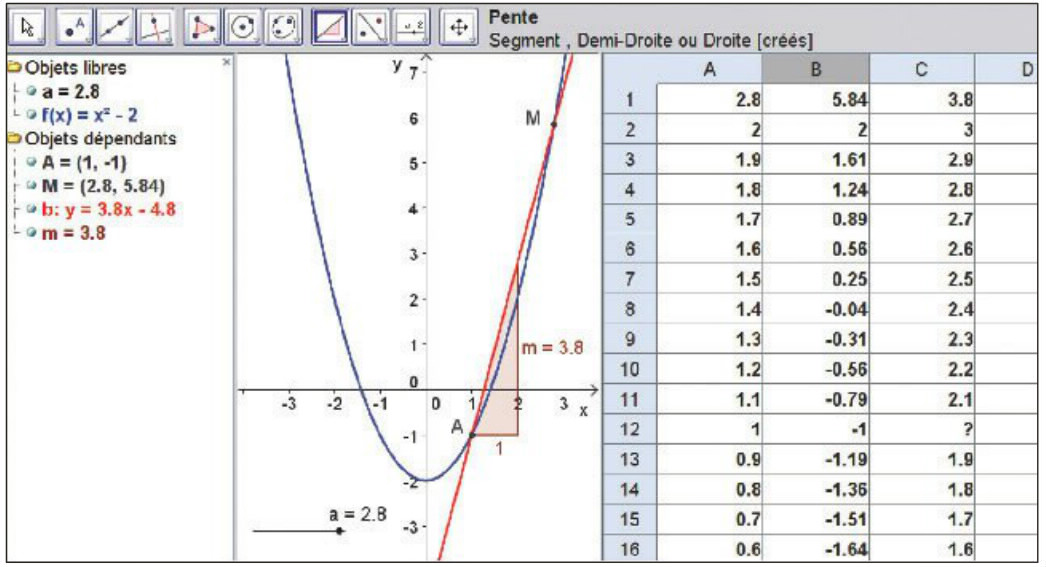
Le taux de variation de *f* entre *a* et *a* + *h* correspond au coefficient directeur de la droite (AM) sur les figures de 1 à 3 et vaut :

Si la limite quand tend vers du taux de variation de la fonction entre et **est un réel**, alors on dit que cette limite est le nombre dérivé de la fonction calculé en . On le note et il correspond au coefficient directeur de la tangente en A (figure 4).

Dans ce cas, on dit que la fonction est **dérivable en .**

Remarque : on peut utiliser la notation pour en posant .

* 1. **Exemple de recherche du nombre dérivé de *f* en *a***



On a représenté graphiquement la fonction définie pour tout .

Le taux de variation de la fonction entre et est défini par :

On observe que pour des valeurs de très proches de (avec ), les valeurs de s’approchent d’une limite réelle. On a donc :

Pour ,

On note *f’*(1) = 2

Ce résultat peut être justifié par un calcul :

* 1. **Nombre dérivé dans la vie courante**
     1. **Nombre dérivé et vitesse instantanée**

Situation 3 p. 113 du manuel.

* + 1. **Nombre dérivé et coût marginal**

Le coût marginal Cm de production mesure la variation du coût total C pour une unité supplémentaire de production. Si on produit *x* unités, la (*x* + 1)-ième unité coûtera à produire :

Cm(*x*) = C(*x* + 1) −C(*x*)

Le coût marginal de production mesure la variation du coût total pour une variation infiniment petite de la quantité produite :

*Exemple :*

On considère que les quantités produites *x*, en tonnes, peuvent être des réels quelconques de l’intervalle [1 ; 10].

Les coûts de production en euros de l’entreprise CoTon (production de tissu en coton) sont donnés par la formule

1. Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C ainsi que les tracés des tangentes à la courbe aux points A et B d’abscisses respectives *x*A = 4 et *x*B = 9. Lire sur le graphique une valeur approchée des nombres dérivés C’(*x*A) et C’(*x*B) à 0,1 près.



1. En déduire le coût marginal pour une production de 4 unités et de 9 unités. Interpréter.

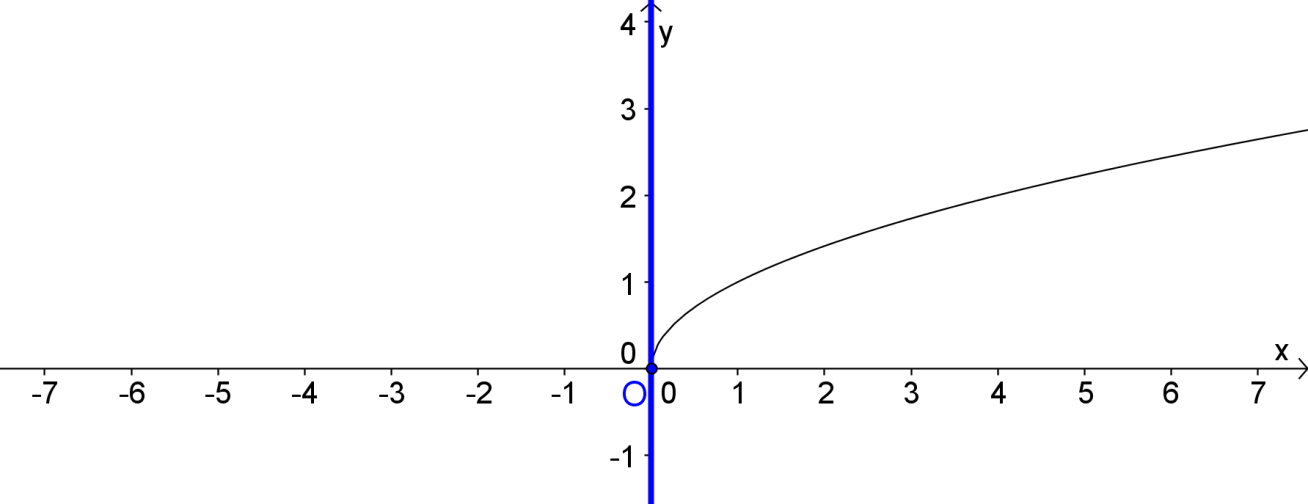
**2.5 Exemple de fonction non dérivable en un réel de leur ensemble de définition**

***Etude de la fonction racine carrée en 0 :***

* La fonction racine carrée est définie en . On peut donc étudier sa dérivabilité en

Cette limite n’est pas un réel, donc la fonction racine carrée n’est pas dérivable en .

Graphiquement, la tangente à la courbe d’équation au point d’abscisse n’a pas de coefficient directeur puisqu’elle est verticale.



***Etude de la fonction valeur absolue en 0 :***

Sur un axe gradué, la distance entre *x* et 0 est notée |*x*|.

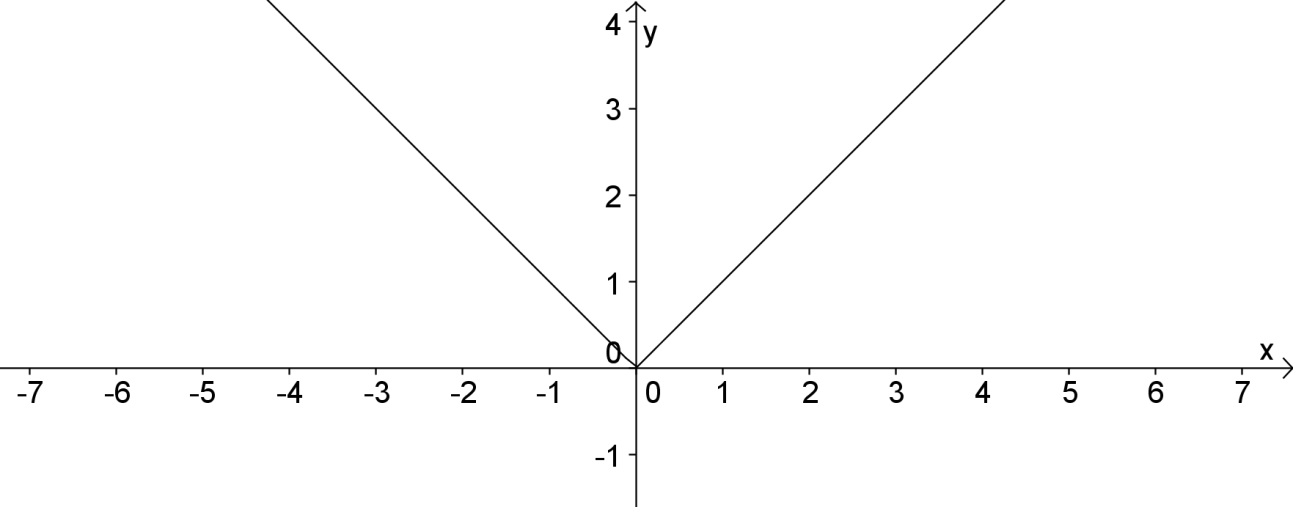
Si *x* ≥ 0 alors |*x*| = *x*

Si *x* < 0 alors |x| = −*x*

* La fonction valeur absolue est définie en . On peut donc étudier sa dérivabilité en

La limite à gauche de 0 est différente de la limite à droite de 0, donc la limite en 0 n’existe pas. La fonction valeur absolue n’est pas dérivable en .

Graphiquement, la tangente à la courbe d’équation au point d’abscisse n’existe pas



## Calcul d’un nombre dérivé à la calculatrice

Sur TI83

Touche MATH, dans le menu MATH, 8 : nbreDérivé

***Exemple :***

nbreDérivé(X²-2,X,1) donne c'est-à-dire que pour on a .

# ms1spe_2019/85553-1Equation réduite d’une tangente

**3.1 Exemple**

La courbe représentative de la fonction carrée est la parabole *P* ci-contre. On place sur *P* le point A d’abscisse 3.

La tangente en A a pour équation réduite *y* = *mx* + *p* où *m*=*f*′(3)

*M* =*f*′(3) = 6

*y* = 6*x* + *p*

A(3 ;9) ϵ *P* donc *y*A = 6 *x*A + *p*

9 = 6×3 + *p*

-9 = *p*

La tangente T a pour équation réduite *y* = 6*x*−9

## Formule de l’équation réduite d’une tangente

Si la fonction est dérivable en , alors une équation de la tangente notée à la courbe au point est :

Le calcul de l’ordonnée à l’origine se fait en remplaçant et par les coordonnées de .

***Démonstration :***

La tangente T à C*f* en A d’abscisse *a* admet *f’*(*a*) pour coefficient directeur donc l’équation réduite de la tangente est *y* = *f*′(*a*)*x* + *p*

A(*a* ; *f*(*a*)) ϵ T donc ses coordonnées vérifient l’équation de la tangente.

*yA* = *f*′(*a*) *xA* + *p*

*f*(*a*) = *f*′(*a*)×*a* + *p*

*f*(*a*)−*f*′(*a*)×*a* = *p*

*T* : *y*=*f*′(*a*)*x* + *f*(*a*)−*f*′(*a*)×*a*

*T* : *y*=*f*′(*a*)(*x*−*a*) + *f*(*a*)

***Exemple :***

Soit la courbe représentant la fonction définie sur par . Déterminer une équation de la tangente à au point d’abscisse .

*Réponse :*

La fonction étant dérivable en , la courbe admet une tangente au point d’équation :

.

On a calculé que

Les coordonnées de sont car

*y* = 2(*x*−1)−1

*y* = 2*x*−3

## Tracer une tangente à la calculatrice

***Exemple :***

Sur TI83

On trace la courbe d’équation Y1=X²-2 (par exemple avec ZOOM Standard)

Touche 2nd DESSIN, dans le menu DESSIN, 5 :Tangente

Préciser l’abscisse du point de contact en appuyant sur **1** puis ENTREE

## Lecture graphique d’une équation réduite de tangente

La lecture du coefficient directeur d’une droite tangente à un point de la courbe donne directement (ou une valeur approchée).

## A partir d’une équation de la tangente au point d’abscisse *a*, retrouver *f* (*a*) et *f ’* (*a*)

Si la tangente à la courbe au point d’abscisse a pour équation , il est possible de remplacer par l’abscisse du point . La valeur de correspondante est l’ordonnée de puisque appartient à la tangente . Cette ordonnée est aussi car le point appartient aussi à la courbe .

Quant à , il est égal au coefficient directeur de la tangente.

***Exemple :***

La tangente à une courbe au point d’abscisse a pour équation

Déterminer et .

*Réponse :*

et



## Tracer une courbe possible à partir d’images et de nombres dérivés

* On place les points correspondant aux images connues
* On trace des petites tangentes (double flèches) de coefficients directeurs égaux aux nombres dérivés.

***Exemple :***

Tracer une courbe possible correspondant aux données suivantes :

# Fonction dérivée

## 4.1 Définition

Si une fonction est dérivable en tout réel d’un intervalle , on dit que est dérivable sur .

La fonction qui à chaque réel de associe le nombre dérivé est appelée **fonction dérivée** de et se note .

## Dérivées des fonctions usuelles

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Fonction** |  | **Définie sur…** | **Dérivable sur…** |  |
| Constante |  |  |  |  |
| linéaire |  |  |  |  |
| Affine |  |  |  |  |
| Carré |  |  |  |  |
| Cube |  |  |  |  |
| Puissance n |  |  |  |  |
| Inverse |  |  |  |  |
| Racine carrée |  |  |  |  |

# *Démonstration de la fonction dérivée de la fonction carrée :*

Soit *f* la fonction carrée définie sur . Soit *a* un réel et *h* un réel non nul.

Le taux de variation de *f* entre *a* et *a* + *h* est égal à :

Quel que soit le réel *a*, si *h* tend vers 0 alors le taux de variation entre *a* et *a* + *h* tend vers 2*a*. cela signifie que *f* est dérivable sur et sa fonction dérivée *f’* est la fonction qui à tout réel *x* associe *f*′(*x*)=2*x*.

*Démonstration de la dérivée de la fonction inverse :*

Soit la fonction inverse *f* définie sur . Soit *a* et *h* deux réels non nuls tels que *a*+ *h* soit non nul.

Le taux de variation de *f* entre *a* et *a* + *h* est égal à :

Quel que soit le réel non nul *a*, si h tend vers 0 alors le taux de variation entre *a* et *a* + *h* tend vers Cela signifie que *f* est dérivable sur et sa fonction dérivée *f’* est la fonction qui à tout réel *x* non nul associe

# Dérivées et opérations

## (*u* + *v*)’

Si et sont des fonctions dérivables sur alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* est la somme de trois fonctions dérivables sur donc est dérivable sur .

## (*ku*)’

Si est une fonction dérivable sur et est une constante réelle alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* est dérivable sur .

## (*uv*)’

Si et sont des fonctions dérivables sur alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* est le produit de deux fonctions dérivables sur donc est dérivable sur .

**Remarque :**

Ce théorème assure que est dérivable sur . Mais la fonction peut être aussi dérivable ailleurs.

Pour le savoir, il faut utiliser la définition du nombre dérivé.

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par .

Est-elle dérivable en  ?

*Réponse :*

On calcule

D’où . La limite est un réel. Donc est aussi dérivable en . Donc, au total, est dérivable sur .

***Démonstration du théorème sur la dérivée d’un produit :***

Hypothèses : les fonctions et sont dérivables en un réel d’un intervalle .

* On exprime le taux d’accroissement de la fonction entre et
* On ajoute au numérateur l’expression nulle
* On fait apparaitre le taux d’accroissement de entre et ainsi que le taux d’accroissement de entre et
* On sépare en deux fractions
* On calcule
* On utilise les hypothèses :

est dérivable en donc

est dérivable en donc

D’où :

Enfin, comme **,** on a :

est un réel.

Conclusion :

* La fonction est dérivable en
* Le nombre dérivé de la fonction en est
* Cette démonstration a été faite pour tout réel d’un intervalle  :

donc si et sont deux fonctions dérivables sur , alors leur produit est une fonction dérivable sur et sa dérivée est

## (u²)’

Si est une fonction dérivable sur alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* est le carré d’une fonction dérivable sur donc est dérivable sur

## (1/*u*)’

Si est une fonction dérivable et non nulle sur alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* et est dérivable et non nulle sur .

## (*u/v*)’

Si est une fonction dérivable sur et si est une fonction dérivable et non nulle sur alors est dérivable sur et

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

* est dérivable sur et est dérivable et non nulle sur .
  1. **Dérivée de *g*(*mx*+*p*)**

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout *x* réel tel que *mx*+*p* appartient à I, la fonction *f* définie par *f*(*x*)=*g*(*mx*+*p*) est dérivable et *f*′(*x*)=*mg*′(*mx*+*p*)

Exemple :

Soit *h* la fonction définie sur par *h*(*x*) =.

La fonction *h* est dérivable sur .

*h*(*x*)=*f*(2*x*−5) avec *f*(*x*) =

*h*′(*x*)=2*f*′(2*x*−5) avec *f*′(*x*) = donc *h*′(*x*)=2× =

## Recherche du point de contact entre *C* et *T*

Si on connait alors on peut trouver en quel(s) points de la courbe le coefficient directeur de la (ou des) tangente(s) est, par exemple, égal à .

Il suffit de calculer et de chercher les éventuelles solutions de l’équation . Si on trouve des solutions, alors ce sont les abscisses des points de contact entre la courbe et ses tangentes de coefficient directeur .

***Exemple :***

Y a-t-il des points de la courbe où la tangente a comme coefficient directeur ?

*Réponse :*

On résout :

Donc les solutions sont ou

Il y a deux points de la courbe où la tangente a comme coefficient directeur  : Le point d’abscisse et le point d’abscisse .

## Déterminer une équation de tangente parallèle à une droite donnée

La tangente d’équation est parallèle à une droite donnée de coefficient directeur si et seulement si . Cette question se résout donc comme celle du paragraphe 6 précédent.

## Position relative de *C* et *T*

Etudier la position de la courbe par rapport à la tangente d’équation revient à étudier le signe de différence

* Si, pour tout ,

Alors la courbe est au-dessus de la tangente

* Si, pour tout ,

Alors la courbe est en-dessous de la tangente

## Déterminer *f* (*x*) avec des données

La connaissance de renseignements tels que pour certains points ou pour certains points, permet de déterminer des inconnues … figurant dans . Il faut autant d’équations indépendantes que d’inconnues à déterminer.

***Exemple :***

Soit la fonction définie sur par

On sait que la courbe passe par les points et . De plus, on sait que et que .

Déterminer les quatre réels

**Méthode**

Il faut calculer pour utiliser les renseignements et

Donc (car et sont des constantes réelles).

équivaut successivement à :

On en déduit que la fonction définie par vérifie les quatre conditions.