

Chapitre 5

Géométrie repérée – COURS

| | |
|--|---|
| 1. Rappels sur les droites | 2 |
| 2. Equation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal..... | 3 |
| <i>Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal</i> | 4 |
| <i>Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite</i> | 4 |
| <i>Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration</i> | 5 |
| 3. Equation d'un cercle | 6 |
| 3.1 Cercle défini par centre et rayon | 6 |
| <i>Méthode : Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.</i> | 6 |
| <i>Méthode : Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.</i> | 7 |
| <i>Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration</i> | 8 |
| 3.2 Cercle défini par un diamètre | 9 |
| 4. Equation d'une parabole..... | 9 |

1. Rappels sur les droites

Définition

Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si

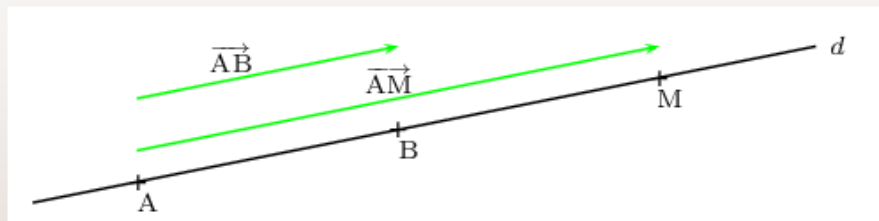
- soit l'un des deux vecteurs est nul
- soit les deux vecteurs ont la même direction.

Propriété

Soient A et B deux points distincts d'une droite d .

M appartient à la droite d si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

\overrightarrow{AB} est un **vecteur directeur** de la droite d .



Remarque:

Une droite peut être définie par 2 points distincts.

Une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur (nécessairement non nul).

Propriété

Deux droites sont **parallèles**

si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs **colinéaires**.

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et λ un réel.

alors: $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$ et $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y)$.

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

alors: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$;

si $I(x_I; y_I)$ est le **milieu** de $[AB]$,

alors: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs.

Le **déterminant** du couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est le réel $xy' - x'y$

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** si et seulement si le **déterminant** du couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est nul.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\vec{u}(-b; a)$ est un **vecteur directeur de la droite** d ,

alors d admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité $ax + by + c = 0$ (avec a et b non nuls ensembles) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

2. Equation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal

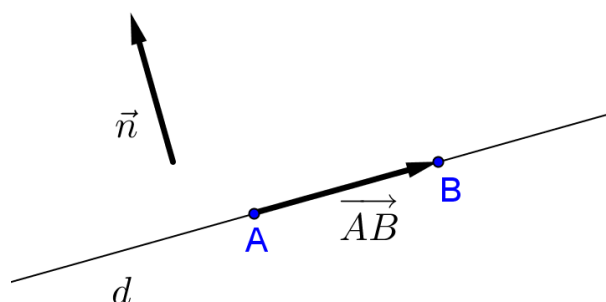
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition :

Un vecteur normal à une droite d est un **vecteur non nul et orthogonal** à tout vecteur directeur de d .

Exemple :

\vec{n} est un vecteur normal à la droite d



Propriétés :

Soit d une droite et soit \vec{n} un vecteur non nul.

- Si \vec{n} est un vecteur normal à d , alors tout vecteur non nul colinéaire à \vec{n} est un vecteur normal à d .
- Tout vecteur normal à d est orthogonal à tout vecteur directeur de d .

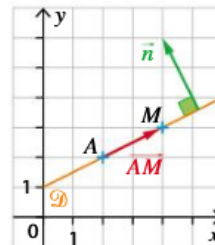
Propriété :

Soit d une droite passant par un point A et de vecteur normal \vec{n} .

Un point M appartient à d si et seulement si : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple :

Soit d la droite passant par le point $A(1 ; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1 ; 3)$.
Soit le point $B(4 ; 3)$.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (4 - 1) \times (-1) + (3 - 2) \times 3 = -3 + 3 = 0$$

Le point B appartient donc à d .

Propriété :

Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Alors une équation cartésienne de d s'écrit :

$$ax + by + c = 0$$

Réciproquement :

Si a et b ne sont pas tous les deux nuls simultanément, alors l'équation $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-5 ; 4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d .

Solution

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d , une équation cartésienne de d est de la forme $3x - y + c = 0$.

Le point $A(-5 ; 4)$ appartient à la droite d , donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc : $c = 19$.

Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Énoncé

Soit la droite d d'équation : $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $(2 ; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur la droite d .

Solution

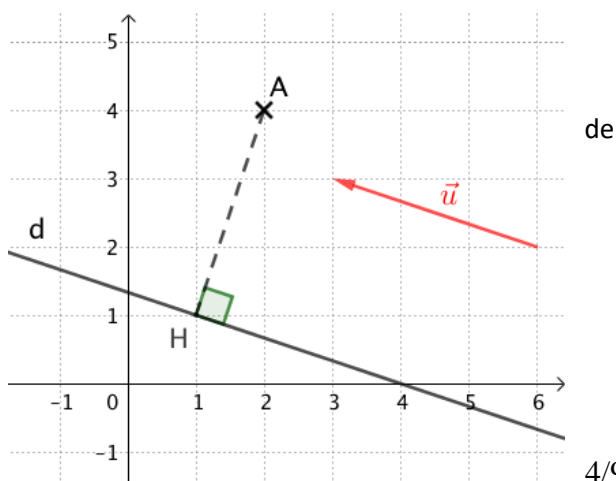
- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur d est un vecteur normal de (AH) .

Une équation cartésienne de d est : $x + 3y - 4 = 0$,
donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Et donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AH) .

Une équation de (AH) est de la forme : $-3x + y + c = 0$.



de

Or, le point $A(2 ; 4)$ appartient à (AH) , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit : $c = 2$.

Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

➤ H est le point d'intersection de d et (AH) , donc ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient les équations des deux droites.

Réolvons alors le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

soit enfin

$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point H , projeté orthogonal de A sur la droite d , a pour coordonnées $(1 ; 1)$.

Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration

Exemple :

Soit les points $A(2 ; 1)$, $B(0 ; -2)$ et $C(-3 ; 5)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation de la hauteur d_A issue de A dans le triangle ABC .

Réponse :

- d_A est la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par A .

Donc $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 - 0 \\ 5 - (-2) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d_A .

On a $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Donc une équation de d_A est :

$$-3x + 7y + c = 0.$$

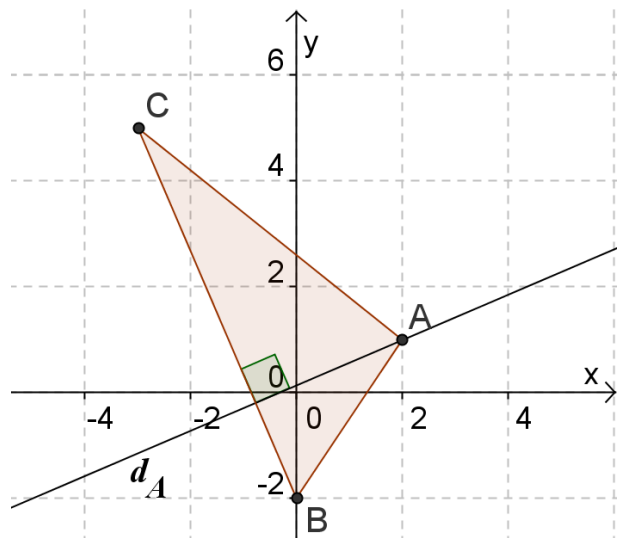
- On détermine c en remplaçant x et y par les coordonnées du point $A(2 ; 1)$ qui est sur d_A :

$$-3(2) + 7(1) + c = 0$$

$$c = 3 \times 2 - 7 \times 1$$

$$c = -1$$

Conclusion : d_A a comme équation cartésienne : $-3x + 7y - 1 = 0$



3. Equation d'un cercle

3.1 Cercle défini par centre et rayon

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Propriété et définitions :

Soit A un point.

Le cercle de centre A et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points M tels que : $AM = r$.

On en déduit la propriété suivante :

Un point $M(x; y)$ appartient au cercle (C) de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du cercle (C) .

Méthode : Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.

Exemple 1 :

Soit les points $A(4; 5)$ et $B(-2; 7)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation du cercle C de centre A passant par B .

Réponse :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2-4 \\ 7-5 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* $M(x; y) \in C$

équivalent successivement à :

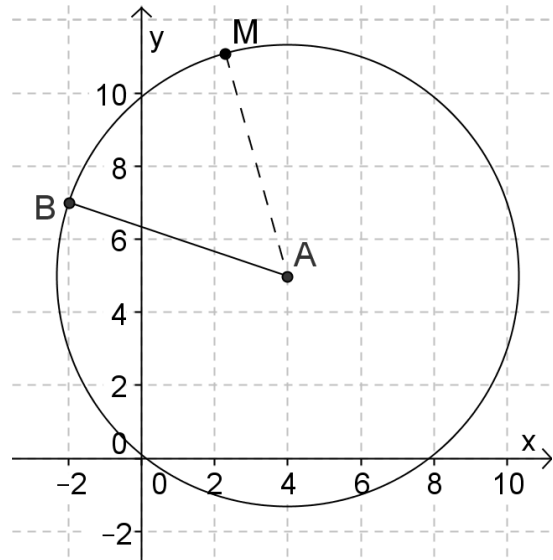
* $AM = r$

* $\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2}$

* $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 40$

* $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 40$

* $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$



Conclusion : Le cercle C a comme équation $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$.

Exemple 2 :

3 CAPACITÉ

Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle \mathcal{C} de centre $A(2; -3)$ et de rayon 4.

- Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} .
- a. Le point $B(6; -2)$ appartient-il à \mathcal{C} ?
b. Déterminer les coordonnées des points de \mathcal{C} d'abscisse 2.

Solution commentée

1 Soit un point M de coordonnées $(x; y)$.
 M appartient à \mathcal{C} si, et seulement si, $AM = 4$ donc si, et seulement si, $AM^2 = 4^2$.
Or, $AM^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2$. Donc M appartient à \mathcal{C} équivaut à $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.
On peut aussi écrire cette équation ainsi :
 $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$, soit $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

2 a. $(x_B - 2)^2 + (y_B + 3)^2 = (6 - 2)^2 + (-2 + 3)^2 = 4^2 + 1^2 = 17$ et $17 \neq 16$.
Les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de \mathcal{C} donc B n'appartient pas à \mathcal{C} .

b. L'ordonnée y des points de \mathcal{C} d'abscisse 2 vérifie $(2 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.
On résout l'équation $(y + 3)^2 = 16$:
 $(y + 3)^2 = 16$ équivaut à $y + 3 = -4$ ou $y + 3 = 4$, soit $y = -7$ ou $y = 1$.
Les points de \mathcal{C} d'abscisse 2 sont les points de coordonnées $(2; -7)$ et $(2; 1)$.

Remarque : On aurait pu utiliser l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Méthode : Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.

On écrit le polynôme en x comme début d'une identité remarquable.

De même pour le polynôme en y .

Puis on met sous la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Exemple 1 :

Déterminer l'ensemble E des points $M(x ; y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.

Réponse :

$x^2 - 2x$ est le début de $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$y^2 + 8y$ est le début de $(y + 4)^2 = y^2 + 8y + 16$

* $M(x ; y) \in E$

équivalent successivement à :

* $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$

* $(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 - 6 = 0$

* $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 23$

* $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = (\sqrt{23})^2$

* $(x - 1)^2 + (y - (-4))^2 = (\sqrt{23})^2$

Conclusion :

l'ensemble E est le cercle de centre $A(1 ; -4)$ et de rayon $r = \sqrt{23}$.

Exemple 2 :

4

CAPACITÉ

Reconnaître une équation de cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ?

Si oui, déterminer le centre et le rayon du cercle.

❶ $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$

❷ $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$

Solution commentée

❶ On cherche à écrire l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ sous la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = k$, où k est un réel.

Comme $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ et $y^2 + 8y = (y + 4)^2 - 16$,

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ équivaut à $(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + 8 = 0$,

donc à $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$, soit $(x - 1)^2 + (y - (-4))^2 = 3^2$.

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ est donc une équation du cercle de centre $A(1 ; -4)$ et de rayon 3.

❷ En procédant comme dans la question précédente, l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + 19 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -2$.

Le premier membre de l'équation est la somme de deux carrés, donc il est positif.

Puisque le second membre est strictement négatif, aucun couple $(x ; y)$ ne vérifie

$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -2$.

Ainsi, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$ est l'ensemble vide.

Utiliser un repère pour étudier une configuration

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(6; 1)$ et $D(8; 5)$.

- 1 a. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
- b. Déterminer une équation de la médiatrice d_1 du segment $[AB]$.
- 2 Déterminer une équation de la médiatrice d_2 du segment $[BD]$.
- 3 Calculer les coordonnées du point d'intersection K de d_1 et d_2 .
- 4 Justifier que le point K appartient à la médiatrice du segment $[AD]$.
- 5 Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABD , c'est-à-dire du cercle de centre K passant par les points A , B et D .
- 6 On considère la droite d perpendiculaire à (DK) passant par D .
Montrer de deux façons différentes que la droite d et le cercle \mathcal{C} n'ont qu'un point commun.
 d est appelée tangente au cercle \mathcal{C} en D .

Conseil

Pour montrer l'unicité d'un point d'intersection, on peut mener un raisonnement par l'absurde, ou chercher les coordonnées de ce point de manière analytique.

Solution commentée

1 a. $\left(\frac{-1+6}{2}; \frac{2+1}{2}\right)$ donc $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b. La médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB) .

Elle a donc pour vecteur normal $\vec{AB}(7; -1)$ et une équation de d_1 est de la forme $7x - y + c = 0$.

Or, I est un point de d_1 donc $7 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + c = 0$, soit $16 + c = 0$, donc $c = -16$.

d_1 a pour équation $7x - y - 16 = 0$.

2 d_2 a pour vecteur normal $\vec{BD}(2; 4)$. Le vecteur $\frac{1}{2}\vec{BD}(1; 2)$ est un autre vecteur normal à d_2 .

Une équation de d_2 est donc de la forme $x + 2y + c = 0$.

Or, le milieu $J(7; 3)$ de $[BD]$ est un point de d_2 , donc $7 + 2 \times 3 + c = 0$, soit $13 + c = 0$, donc $c = -13$.

d_2 a pour équation $x + 2y - 13 = 0$.

3 Les coordonnées $(x; y)$ de K vérifient le système $\begin{cases} 7x - y - 16 = 0 \\ x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = 7x - 16 \\ x + 2(7x - 16) - 13 = 0 \end{cases}$, soit à $\begin{cases} y = 7x - 16 \\ 15x - 45 = 0 \end{cases}$

Par conséquent, $x = 3$ et $y = 7 \times 3 - 16 = 5$.

Les coordonnées de K sont $(3; 5)$.

4 K appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $KA = KB$.

K appartient à la médiatrice de $[BD]$ donc $KB = KD$.

Par conséquent, $KA = KD$ et K appartient à la médiatrice de $[AD]$.

5 Le cercle circonscrit au triangle ABD a pour rayon KA .

$KA = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$,

Une équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Cette équation peut s'écrire $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

6 Première méthode : Soit E un point de d distinct de D .

Le triangle KED est rectangle en D donc son hypoténuse $[KE]$ vérifie $KE > KD$,

ce qui prouve que E n'appartient pas à \mathcal{C} .

D est donc l'unique point d'intersection de d et \mathcal{C} .

Deuxième méthode : On détermine une équation de la droite d .

Un vecteur normal à d est $\vec{KD}(5; 0)$.

Une équation de d est donc de la forme $5x + c = 0$.

Le point D appartient à d donc $8 \times 5 + c = 0$, soit $c = -40$.

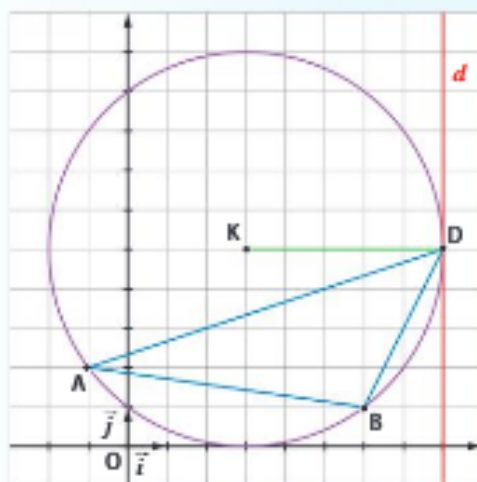
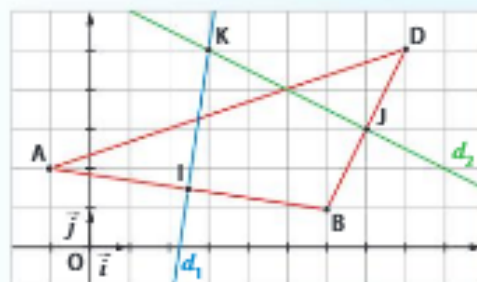
Une équation de d est $5x - 40 = 0$, soit $x - 8 = 0$.

On cherche les points communs à d et à \mathcal{C} , donc les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient

$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x - 8 = 0 \end{cases}$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} (8-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x = 8 \end{cases}$ et donc à $\begin{cases} (y-5)^2 = 0 \\ x = 8 \end{cases}$, soit $x = 8$ et $y = 5$.

Ce sont les coordonnées du point D . Il n'y a donc qu'un point d'intersection qui est D .



Voir exercices

3.2 Cercle défini par un diamètre

Propriété :

Un point $M(x ; y)$ appartient au cercle (C) de diamètre $[AB]$ et seulement si :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple :

Soit les points $A(1 ; 2)$ et $B(-2 ; 3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

Réponse :

* $M(x ; y) \in C$

équivalent successivement à :

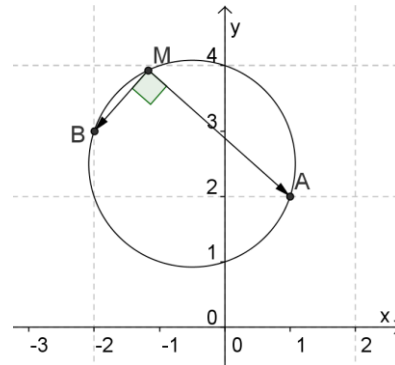
* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -2-x \\ 3-y \end{pmatrix}$

* $(1-x)(-2-x) + (2-y)(3-y) = 0$

* $-2-x+2x+x^2+6-2y-3y+y^2=0$

* $x^2+y^2+x-5y+4=0$



Conclusion :

Le cercle C de diamètre $[AB]$ a comme équation $x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0$

4. Equation d'une parabole

Définition et propriété :

Soient a, b et c trois réels donnés tels que : $a \neq 0$.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie, pour tout réel x , par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La courbe représentative de la fonction f , qui a pour équation : $y = ax^2 + bx + c$, est une **parabole**.

Cette courbe admet :

- pour axe de symétrie la droite d'équation :

$$x = -\frac{b}{2a} ;$$

- pour sommet le point S :

$$S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Exemple

On considère l'équation $y = -x^2 + 2x - 5$.

Cette équation est celle d'une parabole.

Par identification des coefficients, on obtient $a = -1, b = 2$ et $c = -5$.

D'après la propriété, cette parabole admet un axe de symétrie dont une équation

est $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = -\frac{2}{2 \times (-1)}$, soit $x = 1$.

Son sommet S a :

- pour abscisse $x_s = -\frac{b}{2a} = 1$;

- pour ordonnée $y_s = -1^2 + 2 \times 1 - 5 = -1 + 2 - 5 = -4$.

Donc S a pour coordonnées $(1 ; -4)$.

