Chapitre 6
Variations et courbes représentatives des fonctions

1 Lien entre sens de variation de f et signe de f'

1.1 Théorème sur le sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Propriété

- **Pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{f'(x)} > 0$** équivaut à **$\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\boldsymbol{I}$**.

- **Pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{f'(x)} < 0$** équivaut à **$\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur $\boldsymbol{I}$**.

1.2 Caractérisation des fonctions constantes

Propriété

- **Pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{f'(x) = 0}$** équivaut à **$\boldsymbol{f}$ est constante sur $\boldsymbol{I}$**.

2 Extrema d'une fonction

2.1 Définitions

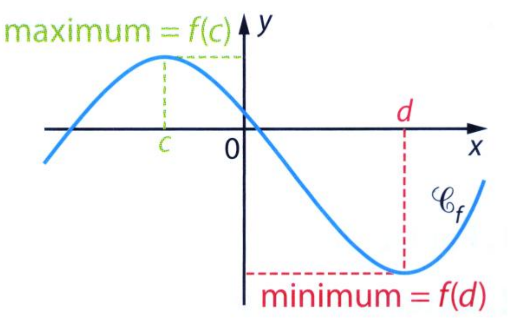
f est une fonction définie sur un intervalle I et c et d des points de I distincts de ses extrémités.

f admet un **maximum** sur I, atteint en $x = c$ signifie que :

pour tout x de I, $f(x) \leq f(c)$

f admet un **minimum** sur I, atteint en $x = d$ signifie que :

pour tout x de I, $f(x) \geq f(d)$



Dire que la fonction f admet un **maximum local en c** signifie que, pour tout x d'un intervalle ouvert I' contenant c et inclus dans I : $\boldsymbol{f(x) \leq f(c)}$.

Dire que la fonction f admet un **minimum local en d** signifie que, pour tout x d'un intervalle ouvert I' contenant d et inclus dans I : $\boldsymbol{f(x) \geq f(d)}$.

On dit que f admet un **extremum local** sur I si f admet un minimum local ou un maximum local sur I.

2.2 Extremum local et nombre dérivé

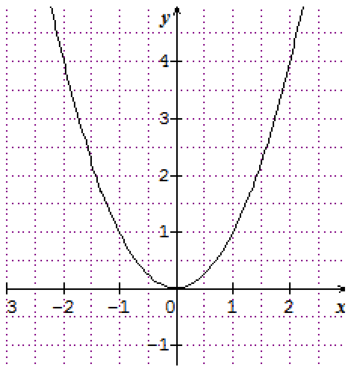
Propriété

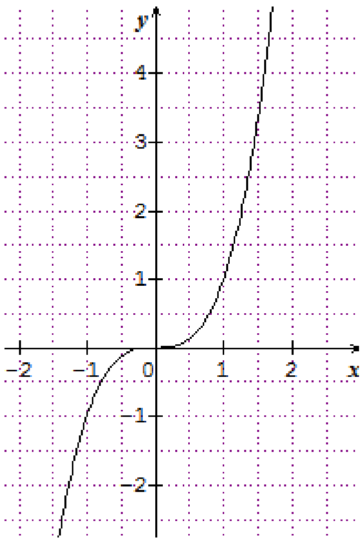
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a appartenant à I.

Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en $x = a$.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ a une dérivée qui s'annule en 0 en changeant de signe puisque $f'(x) = 2x$. Donc f admet un extremum local en $x = 0$.





Contre-exemple

La fonction $f : x \longmapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais qui ne change pas de signe puisque $f'(x) = 3x^2$. Donc f n'admet pas d'extremum local en $x = 0$. (Cependant la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction cube a une tangente horizontale au point d'abscisse 0 car $f'(0) = 0$)

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a appartenant à I.

Si f admet un extremum local en $x = a$, alors : $f'(a) = 0$ et la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

2.3 Extremum d'une fonction polynôme du second degré

Propriété

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

La fonction f admet un extremum en :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

3 Applications de la dérivation

3.1 Etudier les variations d'une fonction et déterminer ses extrema

Exemple 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$

1- Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

2- Dans repère, représenter graphiquement la fonction f.

Exemple 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

3.2 Résoudre un problème d'optimisation

Exemple

Parmi tous les rectangles de périmètre égal à 40, déterminer ceux dont l'aire est la plus grande possible.

3.3 Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité

Exemple

Soit f définie sur $[-3\,;6]$ par : $f(x) = x^3 - 12x$.

1- Calculer $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f.

2- Montrer que pour tout $x \in [-3\,;6]$, $x^3 - 12x + 16 \geq 0$

3.4 Etudier la position relative de deux courbes représentatives

Méthode

Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de différence $f(x) - g(x)$.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x) > 0$
  $f(x) > g(x)$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x) < 0$
  $f(x) < g(x)$

Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exemple

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = -5x + 18.$$

Etudier la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3.5 Etudier une fonction polynôme du second degré

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

1- Calculer la fonction dérivée de f.

2- Déterminer le signe de f ' en fonction de x.

3- Dresser le tableau de variations de f.