Chapitre 7
Variables aléatoires – COURS

1. Variable aléatoire

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair." On a donc : $A = \{2;\ 4;\ 6\}$.

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : $E = \{3\}$.

Définitions

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'univers des possibles est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un événement est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un événement élémentaire est un événement contenant une seule issue.

Exemple

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.

On a donc : $X(1) = 3$; $X(2) = 2$; $X(3) = -4$; $X(4) = 2$; $X(5) = -4$; $X(6) = 2$.

Définition

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.1 Exemples

2.1.1 Exemple 1 avec un tableau

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés : un rouge et un vert notés R et V. On lance les deux dés et on note le résultat de chaque dé. Par exemple, un résultat pourra être $(R1\,;V4)$.

Le jeu suivant est organisé :

Un joueur lance les dés.

- Si aucun dé ne fait 6, le joueur perd 3 €.
- Si un seul des deux dés fait 6, le joueur gagne 2 €.
- Si les deux dés font 6, le joueur gagne 5 €.

1. Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles.
2. Donner la loi de probabilité du gain algébrique[1] du joueur.

---

[1] Gain algébrique : gain qui peut être positif ou négatif

Réponse :

1. Comme il y a deux dés indépendants, un tableau à double entrée permet de représenter toutes les issues possibles. Dans chaque cellule du tableau, on écrit le gain algébrique obtenu.

Dé vert / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	-3	-3	-3	-3	-3	2
2	-3	-3	-3	-3	-3	2
3	-3	-3	-3	-3	-3	2
4	-3	-3	-3	-3	-3	2
5	-3	-3	-3	-3	-3	2
6	2	2	2	2	2	5

L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est : $E = \{-3 ; 2 ; 5\}$

2. La loi de probabilité du gain à ce jeu est résumée dans le tableau suivant :

Valeurs du gain	-3 €	2 €	5 €	TOTAL
Probabilité	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

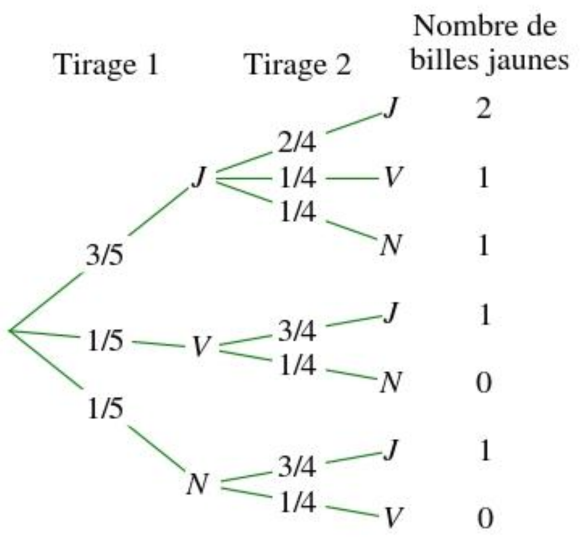
2.1.2 Exemple 2 avec un arbre

Une boîte contient trois billes jaunes, une bille verte et une bille noire.
Un jeu consiste à tirer au hasard une bille de la boîte et, sans la remettre, à tirer une seconde bille. On s'intéresse au nombre de billes jaunes obtenues.

1. Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles.
2. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « nombre de billes jaunes obtenues ».

Réponse :

1. On peut faire un arbre pour représenter toutes les issues possibles. Au bout de chaque branche, on écrit le nombre de billes jaunes obtenues.



L'ensemble des 3 résultats provenant de cette expérience aléatoire est :

$E = \{0 ; 1 ; 2\}$

2. Calcul des probabilités

La probabilité de n'obtenir aucune bille jaune est :

$$\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

La probabilité d'obtenir une bille jaune est :

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$$

La probabilité d'obtenir deux billes jaunes est :

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

On fait un tableau pour donner la loi de probabilité du nombre de billes jaunes obtenues :

Nombre de billes jaunes obtenues	0	1	2	TOTAL
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

2.2 Définition d'une loi de probabilité de variable aléatoire

Soit E l'ensemble des n résultats d'une expérience aléatoire.

$$E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$

Lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre de fois, la distribution des fréquences observées tend vers la distribution des fréquences théoriques.

Cette distribution des fréquences théoriques est appelée **loi de probabilité**.

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x_1; x_2; \dots; x_n$
- Calculer les probabilités correspondantes $p_1; p_2; \dots; p_n$
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeurs possibles de la variable aléatoire	x_1	x_2	…	x_n	TOTAL
Probabilité correspondantes	p_1	p_2	…	p_n	1

3. Paramètres d'une variable aléatoire

3.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$$\boxed{E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \cdots + p_n \times x_n}$$

On écrit aussi sous forme condensée : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i}$

Exemple :

On considère le jeu du tirage successif de deux billes sans remise, vu au paragraphe 2.1.2.

Nombre de billes jaunes obtenues	0	1	2	TOTAL
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

L'espérance de cette loi de probabilité est :

$$E(X) = \frac{1}{10} \times 0 + \frac{6}{10} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 \qquad E(X) = \frac{12}{10} \qquad E(X) = 1{,}2$$

- Interprétation de l'espérance :

Le nombre moyen de billes jaunes obtenu à chaque partie tend vers 1,2 lorsqu'on fait tendre le nombre de parties vers l'infini.

3.2 Variance et écart type d'une variable aléatoire

3.2.1 Comment quantifier la dispersion d'une variable aléatoire ?

Exemple :

Deux joueurs A et B disposent chacun de 1000 € et décident de jouer cette somme au casino, au jeu de la roulette. La roulette comporte 37 numéros. 18 sont noirs, 18 sont rouges, 1 est vert.

- Le joueur A choisit la méthode suivante :

Il mise ses 1000 € sur le noir. Si la bille s'arrête sur le noir, il gagne 2000 €. Si la bille s'arrête sur le rouge ou le vert, il ne gagne rien.

- Le joueur B choisit la méthode suivante :

Il mise ses 1000 € sur le n°23. Si la bille s'arrête sur le n° 23, il gagne 36000 €. Si la bille s'arrête sur un autre numéro, il ne gagne rien.

1) Pour le joueur A :
   a) Donner l'ensemble des gains algébriques X_A possibles.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X_A
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X_A)$ du gain.

2) Pour le joueur B :
   a) Donner l'ensemble des gains algébriques X_B possibles.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X_B
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X_B)$ du gain.

3) Pour lequel des deux joueurs ce jeu est-il le plus risqué ?

<u>Réponse :</u>

1) Pour le joueur A :
   a) Le gain algébrique est :
   - S'il gagne : $-1000 + 2000 = +1000$ €
   - S'il perd : $-1000 + 0 = -1000$ €

$$X_A \in \{-1000\ ;\ 1000\}$$

   b) La loi de probabilité de X_A est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-1000	1000	TOTAL
$P(X_A = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	1

   c) L'espérance du gain est :

$$E(X_A) = \frac{19}{37} \times -1000 + \frac{18}{37} \times 1000$$

$$E(X_A) = -\frac{19000}{37} + \frac{18000}{37} \qquad E(X_A) = -\frac{1000}{37} \qquad E(X_A) \approx -27{,}03 \text{ €}$$

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur A perdra en moyenne 27,03 € par partie.

2) Pour le joueur B :
   a) Le gain algébrique est :
   - S'il gagne : $-1000 + 36000 = +35000$ €
   - S'il perd : $-1000 + 0 = -1000$ €

$$X_B \in \{-1000\ ;\ 35000\}$$

   b) La loi de probabilité de X_B est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-1000	35000	TOTAL
$P(X_B = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$	1

   c) L'espérance du gain est :

$$E(X_B) = \frac{36}{37} \times -1000 + \frac{1}{37} \times 35000$$

$$E(X_B) = -\frac{36000}{37} + \frac{35000}{37} \qquad E(X_B) = -\frac{1000}{37} \qquad E(X_B) \approx -27{,}03 \text{ €}$$

S'il répète un très grand nombre de fois ce jeu, le joueur B perdra en moyenne 27,03 € par partie.

3) Bien que l'espérance mathématique du gain soit la même pour les deux joueurs, on peut voir que, sur une partie, le joueur B prend plus de risques que le joueur A.

Mathématiquement, on peut quantifier ce risque en calculant **la variance** de la loi de probabilité : c'est la moyenne des **carrés des écarts** entre les valeurs x_1, x_2, … ,x_n et l'espérance $E(X)$

3.2.2 Définition de la variance d'une variable aléatoire

Exemple :

Calculer la variance des variables aléatoires précédentes

x_i	-1000	1000	TOTAL
$P(X_A = x_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	1

Espérance mathématique :

$$E(X_A) = -\frac{1000}{37}\ €$$

La variance :

$$V(X_A) = \frac{19}{37} \times \left(-1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2 + \frac{18}{37} \times \left(1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2$$

$$V(X_A) \approx 999\,269{,}54$$

x_i	-1000	35000	TOTAL
$P(X_B = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$	1

Espérance mathématique :

$$E(X_B) = -\frac{1000}{37}\ €$$

La variance :

$$V(X_B) = \frac{36}{37} \times \left(-1000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2 + \frac{1}{37} \times \left(35000 - \left(-\frac{1000}{37}\right)\right)^2$$

$$V(X_B) \approx 34\,080\,350{,}62$$

La variance $V(X_B)$ est nettement supérieure à la variance $V(X_A)$ ca qui traduit un risque nettement plus élevé pour le joueur B.

Définition 1 :

La variance d'une loi de probabilité est la moyenne :

$$\boxed{V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + p_3 \times (x_3 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2}$$

On écrit aussi sous forme condensée : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2}$

Définition 2 :

On démontre que la variance d'une loi de probabilité est la moyenne des carrés moins l'espérance au carré :

$$V(X) = p_1 \times (x_1)^2 + p_2 \times (x_2)^2 + p_3 \times (x_3)^2 + \cdots + p_n \times (x_n)^2 - E(X)^2$$

On écrit aussi sous forme condensée : $$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (p_i \times (x_i)^2) - E(X)^2$$

Exemple :

Calculer la variance $V(X_B)$ par la deuxième définition :

$$V(X_B) = \frac{36}{37} \times (-1000)^2 + \frac{1}{37} \times (35000)^2 - \left(-\frac{1000}{37}\right)^2 \qquad V(X_B) \approx 34\,080\,350{,}62$$

3.2.3 Définition de l'écart type d'une variable aléatoire

Etant donné sa formule de calcul, la variance n'est pas dans la même unité que les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mais dans cette unité au carré. Par exemple $V_B \approx 34\,080\,350{,}62$ €^{2}

On définit un autre paramètre de dispersion, l'écart type :

$$\sigma(X_B) = \sqrt{V(X_B)}$$

Exemple :

Calculer l'écart type des lois de probabilité du gain des joueurs A et B.

Réponse :

- Pour le gain de A, la variance est $V_A \approx 999\,269{,}54$

L'écart type est donc : $\sigma(X_A) = \sqrt{V(X_A)}$

$$\sigma(X_A) \approx \sqrt{999269{,}54}$$
$$\sigma(X_A) \approx 999{,}63 \text{ €}$$

- Pour le gain de B, la variance est $V_B \approx 34\,080\,350{,}62$

L'écart type est donc : $\sigma(X_B) = \sqrt{V_B}$

$$\sigma(X_B) \approx \sqrt{34\,080\,350{,}62}$$
$$\sigma(X_B) \approx 5837{,}84 \text{ €}$$

Remarques

- La variance et l'écart type sont toujours positifs.
- Un jeu d'argent est dit <u>équitable</u>, si l'espérance du gain algébrique $E(X) = 0$.