CHAPITRE 8 : Fonction exponentielle

[1 La fonction exponentielle 2](#_Toc38606966)

[1.1 Théorème sur l’existence et l’unicité de la solution à l’équation différentielle telle que 2](#_Toc38606967)

[1.2 Relation fonctionnelle de la fonction exponentielle 3](#_Toc38606968)

[1.3 Positivité de la fonction exponentielle 3](#_Toc38606969)

[1.4 Sens de variation de la fonction exponentielle 3](#_Toc38606970)

[2 Propriétés de la fonction exponentielle 3](#_Toc38606971)

[2.1 Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle 3](#_Toc38606972)

[2.2 Nombre ; notation *ex* 4](#_Toc38606973)

[2.3 Egalités et inégalités 4](#_Toc38606974)

[3 Tableau de variation et représentation graphique 5](#_Toc38606975)

[4 Fonctions de la forme 5](#_Toc38606976)

[5 Suites de terme général 6](#_Toc38606977)

CHAPITRE 8 : Fonction exponentielle

# La fonction exponentielle

## Théorème sur l’existence et l’unicité de la solution à l’équation différentielle[[1]](#footnote-1) telle que

Soit**une fonction** définie et dérivable sur un intervalle de .

Résoudre sur l’équation différentielle , c’est rechercher **les solutions** qui sont **les** **fonctions**   dérivables sur vérifiant pour tout de .

Si, de plus, le problème impose à comme condition initiale avecet , on écrit l’équation différentielle :

***Exemple :***

Résoudre sur l’équation et , c’est rechercher la fonction dérivable sur telle que pour tout de , **et** .

***Théorème***:

Il existe une unique fonction dérivable sur , qui est la solution de l’équation différentielle :

(E)

***Définition :***

On appelle **fonction exponentielle** l’unique fonction dérivable sur telle que et . Cette fonction sera notée provisoirement .

exp est donc la seule fonction dérivable sur , telle que et

***Dérivée de la fonction exponentielle :***

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur . Sa dérivée est égale à elle-même :

Pour tout réel , .

## Relation fonctionnelle[[2]](#footnote-2) de la fonction exponentielle

Pour tous réels et ,

## Positivité de la fonction exponentielle

pour tout réel .

## Sens de variation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur .

***Démonstration :***

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur et que pour tout réel : .

D’après la positivité de la fonction exponentielle, on sait aussi que pour tout réel .

Conclusion :

**La fonction exponentielle est strictement croissante sur .**

# Propriétés de la fonction exponentielle

## Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

|  |  |
| --- | --- |
| Pour tous réels et et pour tout entier relatif: | |
| (1) |  |
| (2) |  |
| (3) |  |
| (4) |  |

## Nombre ; notation *ex*

D’après la relation (4) établie précédemment, .

En particulier, pour ,.

* On note le nombre[[3]](#footnote-3) qui est l’image de 1 par la fonction exponentielle ***:***

**Une valeur approchée de à 10–3 près est 2,718**.

se lit « *e* exposant  »ou « exponentielle de  »

* Avec cette notation,

On généralise cette nouvelle écriture de la fonction exponentielle pour tout  :

* La relation fonctionnelle et ses corollaires déjà démontrés s’écrivent alors avec cette nouvelle notation :

Pour tous réels et et pour tout entier relatif  :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

On a aussi :

* La fonction est dérivable sur et sa dérivée est elle-même.
* .
* , .
* La fonction est strictement croissante sur .

## Egalités et inégalités

***Egalités équivalentes***

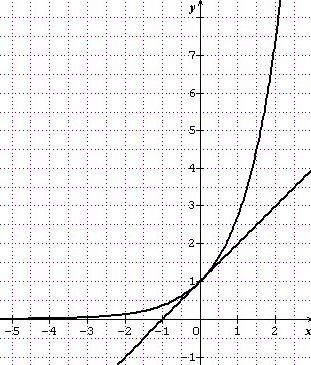
Pour tous réels et  : équivaut à .

***Inégalités équivalentes***

Pour tous réels et  : équivaut à .

# Tableau de variation et représentation graphique

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| signe de | + |
| sens de variation de | 0 |



La droite d’équation est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d’abscisse 0.

donc

Le point de la courbe d’abscisse a pour ordonnée . Donc

Donc la tangente a pour équation .

# Fonctions de la forme

Soit la fonction définie sur par :

est dérivable sur et, pour tout réel  :

***Exemples :***

* définie sur par avec est croissante sur .
* définie sur par avec est décroissante sur .

# Suites de terme général

***Propriété :***

Pour tout réel , la suite de terme général est géométrique.

Démonstration :

On a alors, pour tout entier naturel  :

Soit :

La suite est donc géométrique de raison et de premier terme . On démontre ainsi que, pour tout entier naturel  :

***Exemples :***

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La suite de terme général est géométrique de raison , soit environ .   On dit que la décroissance de la suite est exponentielle.  C:\Users\Marie\AppData\Local\Temp\Texas Instruments\TI-SmartView CE pour la famille TI-83\Capturer1-1587707253341.png | 1. La suite de terme général est géométrique de raison , soit environ .   On dit que la croissance de la suite est exponentielle  C:\Users\Marie\AppData\Local\Temp\Texas Instruments\TI-SmartView CE pour la famille TI-83\Capturer2-1587707265041.png |

1. Une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. [↑](#footnote-ref-1)
2. Une relation fonctionnelle est une relation utilisant les opérations qui est propre à une fonction donnée. [↑](#footnote-ref-2)
3. Le mathématicien suisse Léonard Euler utilisa en 1728 pour la première fois la notation . [↑](#footnote-ref-3)