CHAPITRE 8 : Fonction exponentielle

CHAPITRE 8 : Fonction exponentielle

1 La fonction exponentielle

1.1 Théorème sur l'existence et l'unicité de la solution à l'équation différentielle[1] $y' = y$ telle que $f(0) = 1$

Soit y **une fonction** définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résoudre sur I l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = y}$, c'est rechercher **les solutions** qui sont **les fonctions** f dérivables sur I vérifiant $f'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Si, de plus, le problème impose à f comme condition initiale $f(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, on écrit l'équation différentielle : $\begin{cases} y' = y \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$

<u>Exemple :</u>

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = y$ et $f(0) = 1$, c'est rechercher la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ **et** $f(0) = 1$.

<u>Théorème</u> :

Il <u>existe</u> une <u>unique</u> fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

<u>Définition :</u>

On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction sera notée provisoirement **exp**.
exp est donc la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $(\exp)' = \exp$ et $\exp(0) = 1$

<u>Dérivée de la fonction exponentielle :</u>

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est égale à elle-même :

Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

[1] Une **équation différentielle** est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

1.2 Relation fonctionnelle[2] de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b, $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$

1.3 Positivité de la fonction exponentielle

$\exp(a) > 0$ pour tout réel a.

1.4 Sens de variation de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$.

D'après la positivité de la fonction exponentielle, on sait aussi que $\exp'(x) > 0$ pour tout réel x.

Conclusion :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Corollaires de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

(1) $\exp(2a) = [\exp(a)]^2$

(2) $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$

(3) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

(4) $\exp(na) = [exp(a)]^n$

---

[2] Une relation fonctionnelle est une relation utilisant les opérations qui est propre à une fonction donnée.

2.2 Nombre e ; notation e^x

D'après la relation (4) établie précédemment, $\exp(px) = [\exp(x)]^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

En particulier, pour $x = 1$, $\exp(p) = [\exp(1)]^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

- On note e le nombre[3] qui est l'image de 1 par la fonction exponentielle **:** $\mathbf{exp(1)} = e$

  <u>Une valeur approchée de e à 10^{-3} près est 2,718</u>.

e^x se lit « e exposant x »ou « exponentielle de x »

- Avec cette notation, $\exp(p) = e^p$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

  On généralise cette nouvelle écriture de la fonction exponentielle pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\exp(x) = e^x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

- La relation fonctionnelle et ses corollaires déjà démontrés s'écrivent alors avec cette nouvelle notation :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{na} = (e^a)^n$

On a aussi :

- La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.
- $e^0 = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.3 Egalités et inégalités

<u>Egalités équivalentes</u>

Pour tous réels a et b : $\exp(a) = \exp(b)$ équivaut à $a = b$.

<u>Inégalités équivalentes</u>

Pour tous réels a et b : $\exp(a) < exp(b)$ équivaut à $a < b$.

[3] Le mathématicien suisse Léonard Euler utilisa en 1728 pour la première fois la notation e.

3 Tableau de variation et représentation graphique

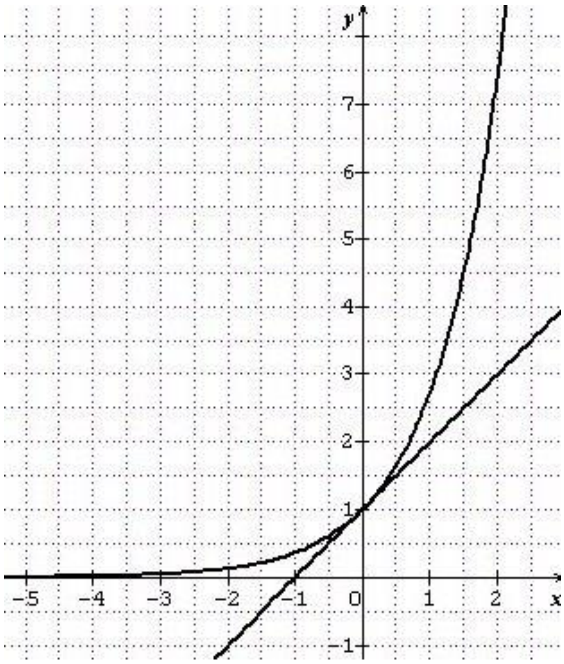
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
sens de variation de f	$0 \nearrow$

La droite T_0 d'équation $y = m\,x + p$ est la tangente à la courbe C_f représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

$m = f'(0) = e^0 = 1$ donc $y = x + p$

Le point de la courbe C_f d'abscisse 0 a pour ordonnée $e^0 = 1$. Donc $1 = 0 + p$

Donc la tangente T_0 a pour équation $y = x + 1$.



4 Fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{ax+b}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels.}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = a \times e^{ax+b}}$$

Exemples :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$ avec $k > 0$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-kx}$ avec $k > 0$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

5 Suites de terme général e^{na}

Propriété :

Pour tout réel a, la suite de terme général e^{na} est géométrique.

Démonstration :

On a alors, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a}$$

$$u_{n+1} = e^{na+a}$$

$$u_{n+1} = e^{na} \times e^{a}$$

Soit :

$$u_{n+1} = u_n \times e^{a}$$

$$u_{n+1} = e^{a} \times u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^{a} et de premier terme $e^{0} = 1$. On démontre ainsi que, pour tout entier naturel n :

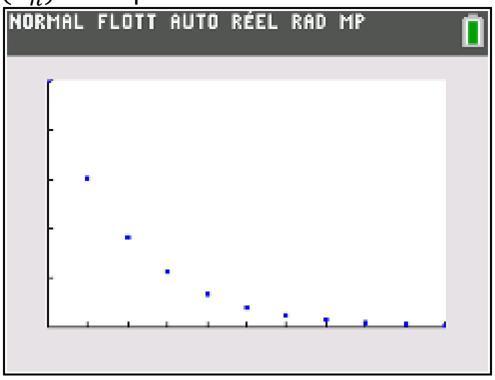
$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 1 \times (e^{a})^n$$

$$e^{na} = (e^{a})^n$$

Exemples :

1- La suite (u_n) de terme général $u_n = e^{-0,5n}$ est géométrique de raison $e^{-0,5}$, soit environ $0,61$.
On dit que la décroissance de la suite (u_n) est exponentielle.



2- La suite (v_n) de terme général $v_n = e^{0,5n}$ est géométrique de raison $e^{0,5}$, soit environ $1,65$.
On dit que la croissance de la suite (v_n) est exponentielle