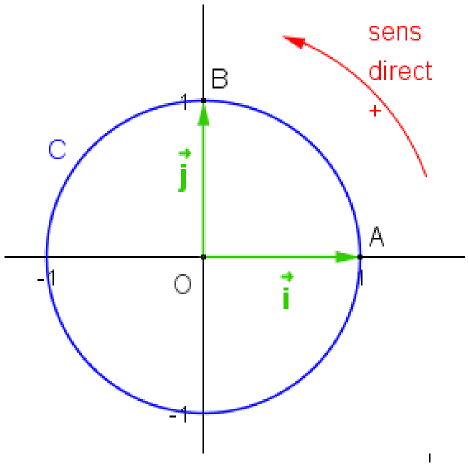
Chapitre 9
Trigonométrie – COURS

1. Lecture sur le cercle trigonométrique

1.1 Le cercle trigonométrique

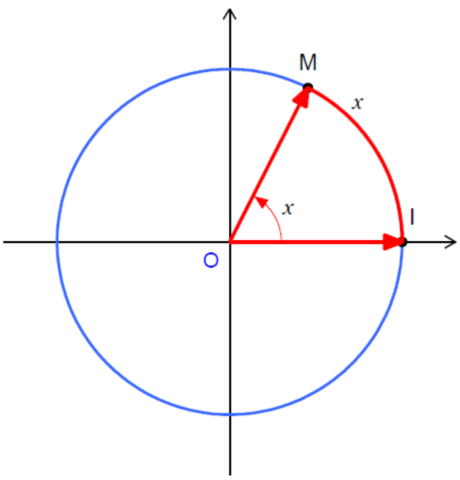


Définition
Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

1.2 Longueur d'un arc

Propriété (admise)
Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ (exprimé proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.



Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	270
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

1.3 Radian

Définition
Soit U le point du cercle trigonométrique tel que l'arc $\widehat{IU}$ ait pour longueur 1 unité (exprimée dans l'unité de longueur du repère).

On définit un radian (noté 1 rad) comme étant la mesure de l'angle $\widehat{IOU}$.

Propriété (admise)
L'angle plat mesure π radians et aussi 180°. La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degré.

Ainsi, on obtient le tableau des valeurs remarquables :

$\times\frac{180}{\pi}$

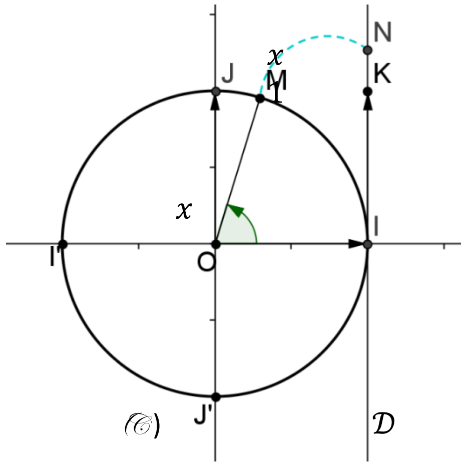
α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	**180°**	360°
α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π

$\times\frac{\pi}{180}$

Exemple : Si $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ rad alors $\alpha = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = \frac{2\times180}{5} = 72°$

2. Enroulement de la droite des réels

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle trigonométrique.



Soit $\mathcal{D}$ la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point I et soit K le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1\,;1)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Par le procédé de l'enroulement de la droite $\mathcal{D}$, qui représente les nombres réels, autour du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$:

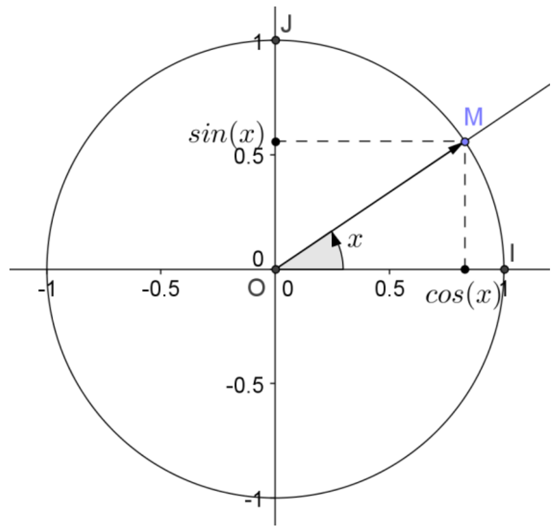
- A tout point N de la droite $\mathcal{D}$ d'abscisse x dans le repère $\left(I;\overrightarrow{IK}\right)$ on associe un **<u>unique</u>** point M du cercle $(\mathscr{C})$. On dit que M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique ou qu'on associe le réel x au point M.
- Réciproquement, à tout point M de $(\mathscr{C})$ on associe une infinité de points de la droite $\mathcal{D}$ dont les abscisses dans le repère $\left(I;\overrightarrow{IK}\right)$ sont $x,\ \ x+1\times 2\pi,\ \ x+2\times 2\pi,\ \ldots,\ \ x-1\times 2\pi,\ \ x-2\times 2\pi,\ldots$

Propriété (admise)

Soit x un réel et M le point du cercle $(\mathscr{C})$ associé au réel x. Le point M est associé à tous les réels de la forme $x+k\times 2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

3. Sinus et cosinus d'un nombre réel

3.1 Définitions



Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

- On appelle **cosinus** du réel x **l'abscisse** du point M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
- On appelle **sinus** du réel x **l'ordonnée** du point M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

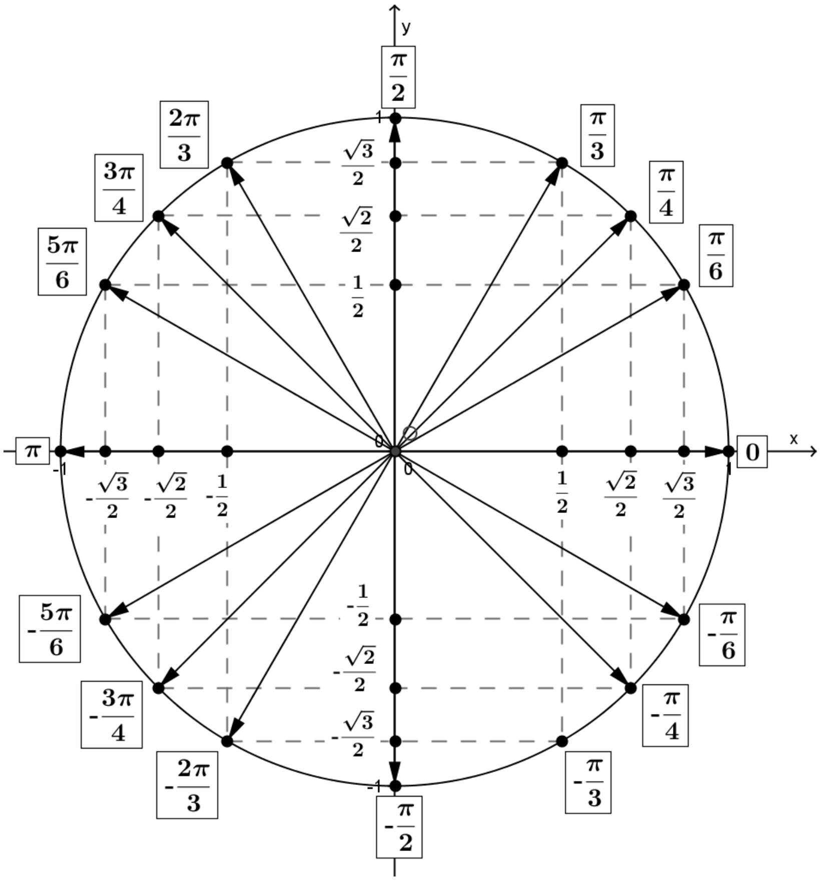
Propriétés

- Pour tout réel x, $\cos(x)\in[-1\,;1]$ et $\sin(x)\in[-1\,;1]$.
- Pour tout réel x, $\cos(x+k\times 2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+k\times 2\pi)=\sin(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Remarque

$(\cos(x))^2$ peut se noter $\cos^2 x$.

3.2 Valeurs remarquables du sinus et du cosinus



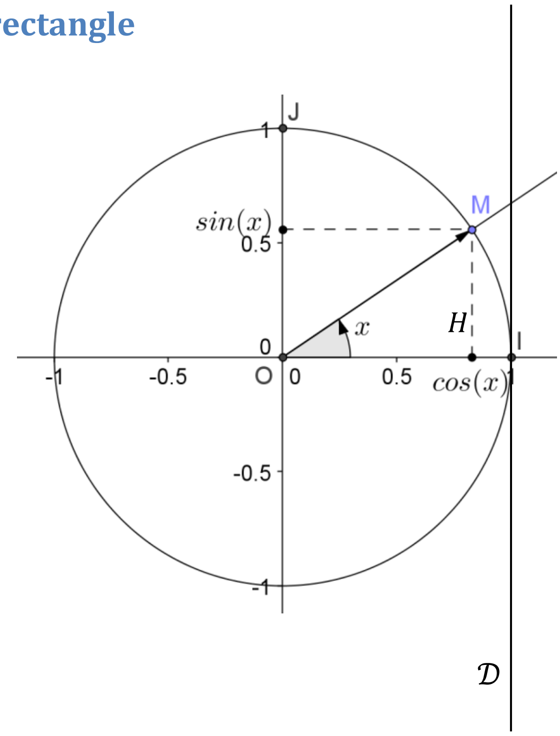
D'où les valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

3.3 Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle

On considère le cercle trigonométrique et la tangente $\mathcal{D}$ au cercle.

Pour tout nombre x tel que : $0 < x < \frac{\pi}{2}$, d'image M, on considère le point H de l'axe des abscisses tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).



Dans le triangle HOM, rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{\text{côté adjecent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OH}{OM}$$

$$\sin \widehat{HOM} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{HM}{OM}$$

Or : $OM = 1$

$OH = \cos x$ et $HM = \sin x$

Donc :

$$\cos \widehat{HOM} = \cos x$$

$$\sin \widehat{HOM} = \sin x$$