

I. Sens de variation d’une suite (u_n) :

1/ Tous les sens de variation possibles pour une suite (u_n) :

Sens de variation de la suite	La suite (u_n) est <u>croissante</u>	La suite (u_n) est <u>décroissante</u>
Exemple de représentation graphique d’une suite ayant ce sens de variation		
Définition	La suite (u_n) est croissante si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier naturel n .	La suite (u_n) est décroissante si et seulement si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n .

Sens de variation de la suite	La suite (u_n) est <u>constante</u>	La suite (u_n) <u>n'est pas monotone</u>
Exemple de représentation graphique d’une suite ayant ce sens de variation		
Définition.	La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier naturel n	La suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante alors elle n'est pas monotone. Sur l'exemple ci-dessus, si l'évolution de la suite se poursuit, l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour tout $n \geq 3$ alors on dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

Quand une suite est croissante ou décroissante ou constante, on dit qu'elle est **monotone** autrement dit, elle ne change pas de sens de variation.

2/ Démontrer le sens de variation d'une suite (u_n) :

a/ Avoir une idée du sens de variation d'une suite avant de le démontrer :

On peut calculer les premiers termes de la suite u_0, u_1, u_2, u_3 pour se faire une idée du sens de variation de celle-ci.

- Si $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$ alors que la suite (u_n) semble croissante.
- Si $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3$ alors que la suite (u_n) semble décroissante.
- Si $u_0 = u_1 = u_2 = u_3$ alors que la suite (u_n) semble constante.

➤ **Pour ces trois cas, il faut confirmer ou non ce sens de variation par une démonstration** pour tout entier naturel n car on ne sait pas comment la suite se comporte pour les autres termes non calculés.

- Si u_0, u_1, u_2, u_3 ne sont pas rangés dans le même ordre alors on peut conclure que la suite (u_n) n'est pas monotone sans faire de démonstration supplémentaire.

b/ Méthode de démonstration n° 1 du sens de variation d'une suite (u_n) qui semble monotone :

On étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n .

Explication de cette méthode :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n de \mathbb{N} équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n de \mathbb{N}

Cela signifie que $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_{100} \leq u_{101} \leq \dots$ etc.

Un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent donc la suite (u_n) est croissante.

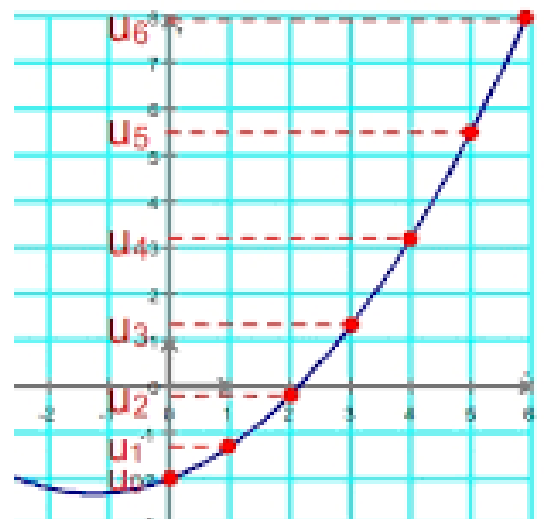
c/ Méthode de démonstration n° 2 du sens de variation d'une suite (u_n) qui semble monotone :

Si (u_n) est une suite définie de façon explicite à l'aide d'une fonction f de sorte que $u_n = f(n)$ alors la suite (u_n) a les mêmes variations que la fonction f sur $[0 ; +\infty[$

Explication de cette méthode :

Quand la suite est définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$, le nuage de points représentant la suite (u_n) est placé sur la courbe de la fonction f en ne considérant que l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Sur le schéma ci-contre, la fonction f telle que $u_n = f(n)$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc la suite (u_n) suivant les mêmes variations est elle-même croissante.



3/ Exemples de démonstration du sens de variation d'une suite :

Exemple 1 : La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

➤ Commençons par avoir une idée du sens de variation de la suite (u_n) avant de le démontrer :

Grâce au calcul des premiers termes $u_0 = -1, u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{2}$, la suite **semble** croissante.

Démontrons-le avec la méthode n° 1 :

u_{n+1} est obtenu en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ ainsi $u_{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1+1} = \frac{n}{n+2}$.

Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

Pour tout n de \mathbb{N} , on a :

$$n+2 > 0 \text{ et } n+1 > 0 \text{ donc } \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

$u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n de \mathbb{N}

$u_{n+1} > u_n$ pour tout n de \mathbb{N}

Tout terme de la suite (u_n) est plus grand que son précédent.

La suite (u_n) est donc croissante.

Démontrons-le avec la méthode n° 2 :

$u_n = f(n)$ avec la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Sur $[0 ; +\infty [$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.

La suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f sur $[0 ; +\infty [$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exemple 2 : La suite (u_n) est définie par $u_n = n^2 - 2n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

➤ Commençons par avoir une idée du sens de variation de la suite (u_n) avant de le démontrer :

Grâce au calcul des premiers termes $u_0 = -4, u_1 = -5, u_2 = -4, u_3 = -1$, on peut affirmer que la suite (u_n) **n'est pas monotone** car $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$.

➤ L'étude peut s'arrêter là ou se poursuivre selon les énoncés des exercices auxquels il faudra se conformer.

Si on veut poursuivre l'étude, on peut calculer plus de termes de la suite :

$$u_0 = -4, u_1 = -5, u_2 = -4, u_3 = -1, u_4 = 4, u_5 = 11, u_6 = 20$$

La suite (u_n) **semble** croissante à partir du rang 1 mais **ceci est à démontrer**.

Démontrons-le avec la méthode 1 :

Dans $u_n = n^2 - 2n - 4$ remplaçons n par $n + 1$ pour obtenir l'expression de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n + 1)^2 - 2(n + 1) - 4$$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 4$$

$$u_{n+1} = n^2 - 5$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 5 - (n^2 - 2n - 4)$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 5 - n^2 + 2n + 4$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 1$$

$2n - 1 \geq 0$ équivaut successivement à :

$$2n \geq 1$$

$$n \geq 0,5$$

Comme n ne prend que des valeurs entières, cette inéquation est équivalente à $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour tout entier } n \geq 1$$

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1$$

Cela signifie que $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_{100} \leq u_{101} \leq \dots$
etc.

La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Démontrons-le avec la méthode 2 :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 4 \text{ et telle que } u_n = f(n).$$

Sa dérivée est $f'(x) = 2x - 2$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f			

La fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc **la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1** puisqu'elle a le même sens de variation.

II. Sens de variation d'une suite arithmétique (u_n) de raison r :

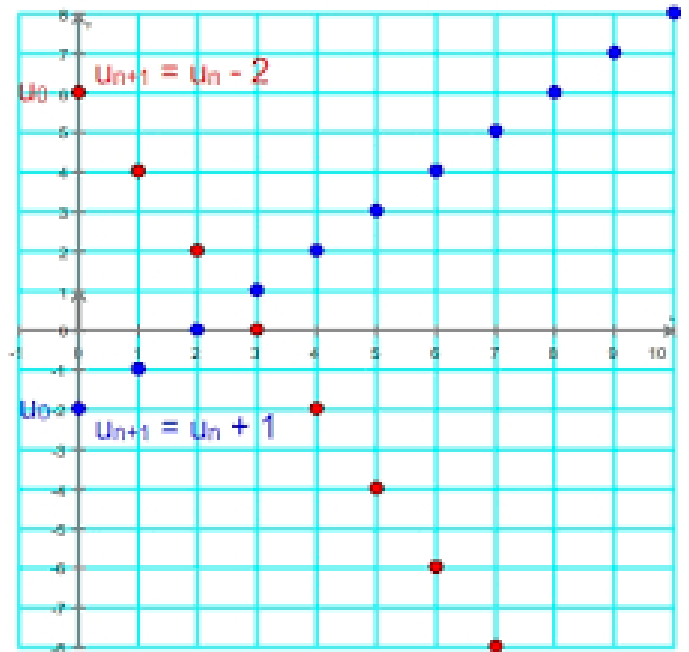
La suite arithmétique (u_n) de raison r est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + r$.

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Exemples :

Sur le schéma ci-contre, on a :

- Une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 1$ qui est croissante.
- Une suite (v_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 2$ qui est décroissante.

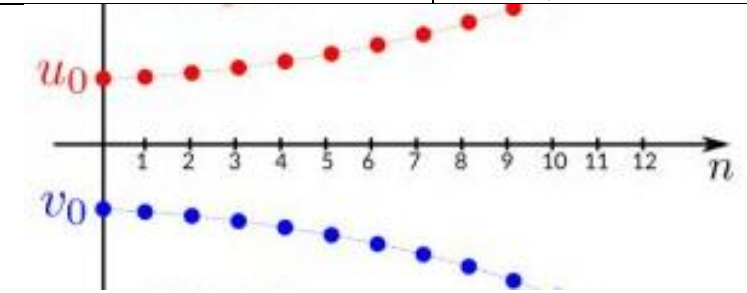
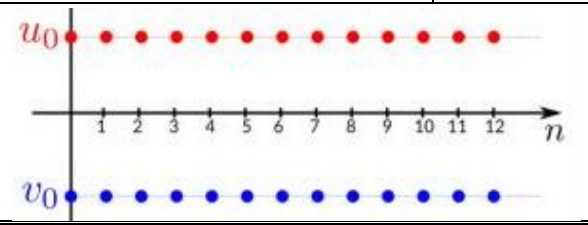
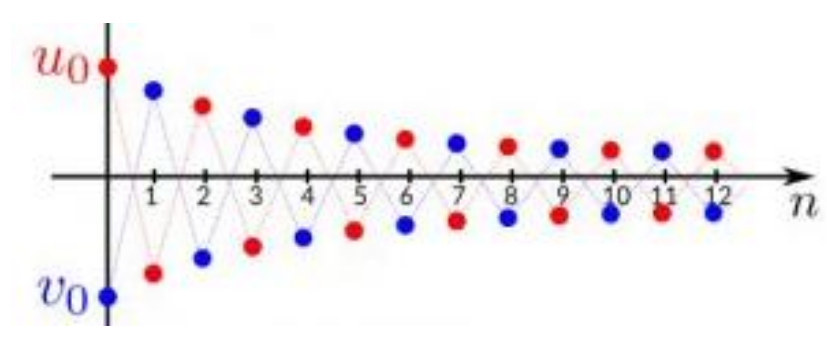


III. Sens de variation d'une suite géométrique (u_n) de raison q :

Dans la colonne « Exemples » du tableau ci-dessous, on a :

- Une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison q .
- Une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -2$ et de raison q .

Valeur de la raison q	Exemples		Conclusion
$0 < q < 1$	4 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $q = 0,8$	4 premiers termes de la suite (v_n) avec $v_0 = -2$ et $q = 0,8$	<p>Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors les termes de la suite se rapprochent de 0 en étant positifs. La suite géométrique (u_n) est décroissante.</p> <p>Si $v_0 < 0$ et $0 < q < 1$ alors les termes de la suite se rapprochent de 0 en étant négatifs. La suite géométrique (v_n) est croissante.</p>
	$u_0 = 2$ $u_1 = 1,6$ $u_2 = 1,28$ $u_3 = 1,024$	$v_0 = -2$ $v_1 = -1,6$ $v_2 = -1,28$ $v_3 = -1,024$	
	<p>Les deux nuages de points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les suites (u_n) et (v_n) ont donc des sens de variation contraires.</p>		

$q > 1$	4 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $q = 1,1$	4 premiers termes de la suite (v_n) avec $v_0 = -2$ et $q = 1,1$	<p>Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors les termes de la suite sont de plus en plus grands. La suite géométrique (u_n) est croissante.</p> <p>Si $v_0 < 0$ et $q > 1$ alors la suite géométrique (v_n) est décroissante.</p>
	$u_0 = 2$ $u_1 = 2,2$ $u_2 = 2,42$ $u_3 = 2,662$	$v_0 = -2$ $v_1 = -2,2$ $v_2 = -2,42$ $v_3 = -2,662$	
	 <p>Les deux nuages de points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les suites (u_n) et (v_n) ont donc des sens de variation contraires.</p>		
$q = 1$	3 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $q = 1$	3 premiers termes de la suite (v_n) avec $v_0 = -2$ et $q = 1$	<p>Si $u_0 > 0$, $v_0 < 0$ et $q = 1$ alors les suites géométriques (u_n) et (v_n) sont constantes.</p>
	$u_0 = 2$ $u_1 = 2$ $u_2 = 2$	$v_0 = -2$ $v_1 = -2$ $v_2 = -2$	
			
$q < 0$	4 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $q = -0,8$	4 premiers termes de la suite (v_n) avec $v_0 = -2$ et $q = -0,8$	<p>Si $u_0 > 0$, $v_0 < 0$ et $q < 0$ alors les suites géométriques (u_n) et (v_n) ne sont pas monotones.</p>
	$u_0 = 2$ $u_1 = -1,6$ $u_2 = 1,28$ $u_3 = -1,024$	$v_0 = -2$ $v_1 = 1,6$ $v_2 = -1,28$ $v_3 = 1,024$	
	 <p>Le signe des termes des suites (u_n) et (v_n) alterne entre positif et négatif.</p>		
$q = 0$	4 premiers termes de la suite (u_n) avec $u_0 = 2$ et $q = 0$		<p>Si $u_0 > 0$, $v_0 < 0$ et $q = 0$ alors les suites géométriques (u_n) et (v_n) sont nulles à partir du rang 1.</p>
	$u_0 = 2$ $u_1 = 0$ $u_2 = 0$ $u_3 = 0$		

Exemple :

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2^n$.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Méthode 1 :

On utilise la méthode qui consiste à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n puisque cette méthode peut être utilisée quelle que soit la nature de la suite.

$$u_{n+1} - u_n = -2^{n+1} - 2^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2^n \times 2 - 2^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2^n(2-1)$$

$$u_{n+1} - u_n = -2^n$$

Pour tout entier naturel n , on a $-2^n < 0$
donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n
 $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n

La suite (u_n) est décroissante.

Méthode 2 :

Montrons que la suite (u_n) est géométrique :

$$u_n = -2^n$$

$$u_n = -1 \times 2^n$$

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ donc la suite } (u_n) \text{ est géométrique avec}$$

$$u_0 = -1 \text{ et } q = 2.$$

Déduisons le sens de variation de la suite (u_n) :

$u_0 = -1 < 0$ et $q = 2 > 1$ donc la suite géométrique (u_n) est décroissante.

IV. Limite d'une suite lorsque n tend vers $+\infty$:

1/ Notion de limite de suite :

S'intéresser à la limite d'une suite c'est étudier la valeur limite des termes de la suite quand on donne à n des valeurs entières très grandes, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ».

2/ Les différents cas possibles pour la limite d'une suite :

a/ La limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est un nombre fini :

n	u	n	u	n	u
1	2	16	1,0625	31	1,03226
2	1,5	17	1,05882	32	1,03125
3	1,33333	18	1,05556	33	1,0303
4	1,25	19	1,05263	34	1,02941
5	1,2	20	1,05	35	1,02857
6	1,16667	21	1,04762	36	1,02778
7	1,14286	22	1,04545	37	1,02703
8	1,125	23	1,04348	38	1,02632
9	1,11111	24	1,04167	39	1,02564
10	1,1	25	1,04	40	1,025
11	1,09091	26	1,03846	41	1,02439
12	1,08333	27	1,03704	42	1,02381
13	1,07692	28	1,03571	43	1,02326
14	1,07143	29	1,03448	44	1,02273
15	1,06667	30	1,03333	45	1,02222
		31	1,03226	46	1,02174

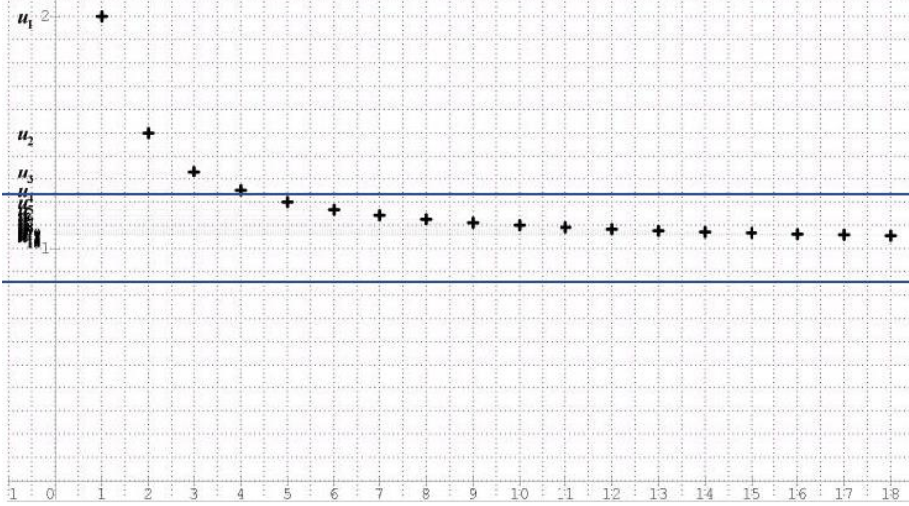
La suite (u_n) étudiée est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Quand n devient grand (on dit que n tend vers $+\infty$), les termes de la suite (u_n) se rapproche de la valeur 1 sans jamais atteindre cette valeur.

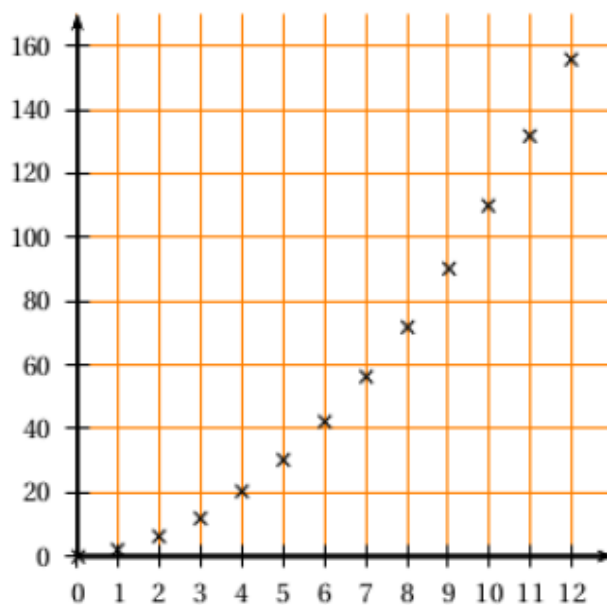
Le nombre 1 est la valeur limite des termes u_n quand n tend vers $+\infty$.

On note cela $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.



b/ La limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) :

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156

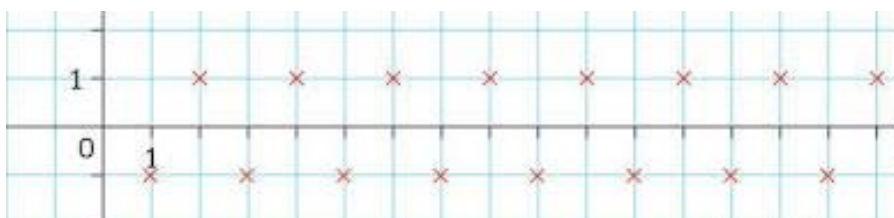


La suite (u_n) étudiée est définie pour tout entier naturel n par :
 $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ et $u_0 = 0$.

Quand n devient grand, les termes de la suite (u_n) deviennent grands et tendent vers $+\infty$.

On note cela $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

c/ La suite (u_n) n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$:



La suite (u_n) étudiée est définie pour tout entier naturel n par :
 $u_n = (-1)^n$.

Quand n devient grand, les termes de la suite (u_n) prennent alternativement les valeurs -1 et 1 .

La suite n'a pas de limite car cette valeur doit être unique.

V. Conjecturer la limite d'une suite à la calculatrice :

Conjecturer : émettre une hypothèse sans la démontrer.

La pyrale est une redoutable chenille invasive qui s'attaque aux buis. Un massif forestier des Pyrénées en est victime depuis quelques temps. Les agents de l'ONF (office national des forêts) ont procédé à des relevés statistiques : **chaque année, le nuisible fait disparaître 15 % des buis de ce massif.**

Alors que l'on compte **75000 pieds de buis**, l'ONF préconise de replanter **3000 plants chaque année** pour compenser les dégâts de pyrale en attendant un éventuel traitement contre cette chenille.



1/ Si la préconisation de l'ONF, n'est pas suivie, quelle conjecture peut-on émettre grâce à la calculatrice quant au nombre de buis dans ce massif à long terme ?

Solution :

Modélisons l'énoncé par une suite :

Soit u_n le nombre de buis dans le massif forestier au bout de n années si la préconisation n'est pas suivie.

On a $u_0 = 75000$.

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{15}{100}\right) \times u_n$$

$u_{n+1} = 0,85 \times u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,85.

$$u_n = u_0 \times q^n = 75000 \times 0,85^n$$

Utilisons la table de valeurs de la calculatrice pour conjecturer la limite de la suite :

Utiliser la Touche **f(x)** puis **Y1=75000*0,85^x**

puis **déf table** (mettre le début de la table à 0 et faire un pas de 10 pour tendre plus rapidement qu'un pas de 1 vers des grandes valeurs de n)

puis **table**.

On obtient le tableau de valeurs suivant :

X	Y1
0	75000
10	14766
20	2907
30	572,31
40	112,67
50	22,182
60	4,3671
70	0,8598
80	0,1693

La valeur limite de la suite (u_n) est 0 lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. A long terme les buis vont disparaître de ce massif forestier. Pour ce cas concret il n'y a plus de buis dans le massif dès que $u_n < 1$.

2/ Si la préconisation de l'ONF est suivie, quelle conjecture peut-on émettre grâce à la calculatrice quant au nombre de buis dans ce domaine à long terme ?

Solution :

Modélisons l'énoncé par une suite :

On note v_n le nombre de buis dans ce massif n années après cette préconisation.

$v_{n+1} = 0,85 \times v_n + 3000$ et $v_0 = 75000$. La suite (v_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

Utilisons la table de valeurs de la calculatrice pour conjecturer la limite de cette suite :

Mode SUITE puis **f(x)**, choisir **SUITE(n+1)** :

nMin = 0

$u(n+1) = 0,85 * u(n) + 3000$

$u(0) = 75000$

déf table (début de la table à 0 et pas de 10 comme précédemment) puis **table**.

On obtient la table de valeurs suivante :

n	u
0	75000
10	30828
20	22132
30	20420
40	20083
50	20016
60	20003
70	20001
80	20000
90	20000

Aller sur la deuxième colonne du tableau pour voir que v_{80} et v_{90} ne valent pas exactement 20000 car une limite ne s'atteint pas. En effet $v_{80} \approx 20000,024$ et $v_{90} \approx 20000,005$.

La limite de la suite (v_n) est égale à 20000 et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 20000$.

Après un grand nombre d'années, le nombre de buis dans le massif se stabilise ou tend vers 20000.

VI. Algorithme et boucle « Tant que » :

On place 1000 € sur un compte bancaire rémunéré au taux annuel de 5 %. Ecrire un algorithme en langage naturel puis en langage Python qui donne au bout de combien d'années la somme sur le compte sera supérieure ou égale à 2000 € pour la première fois.

1/ Principe général de cet algorithme :

On note S la somme sur le compte. Initialement cette somme vaut 1000 €.

On note N le nombre d'années écoulées. Initialement N vaut 0.

Tant que la somme sur le compte est strictement inférieure à 2000 c'est-à-dire que l'on n'a pas encore ce que l'on souhaite :

On passe à l'année suivante en calculant la nouvelle somme d'argent sur le compte et en augmentant le nombre d'années écoulées de 1

Fin tant que

Quand on sort de la boucle, on a pour la première fois la somme voulue c'est-à-dire une somme supérieure ou égale à 2000 €. Il ne reste plus qu'à afficher le nombre d'années écoulées.

2/ Algorithme en langage naturel :

Variables
S est un réel et N est un entier naturel
Début de l'algorithme
S ← 1000
N ← 0
Tant que S < 2000
 S ← S × 1,05
 N ← N + 1
Fin tant que
Afficher N
Fin de l'algorithme

3/ Traduction en langage Python :

```
def capital() :  
.. S=1000  
.. N=0  
.. while S<2000 :  
....S=S*1,05  
....N=N+1  
..return(N)
```

4/ Affichage de cet algorithme :

Il affiche 15 ce qui signifie que le capital est supérieur ou égal à 2000 € au bout de 15 ans.