CHAPITRE 11 : Produit scalaire

[1 Produit scalaire 2](#_Toc31203926)

[1.1 Définition du produit scalaire 2](#_Toc31203927)

[1.2 Vecteurs colinéaires et carré scalaire 3](#_Toc31203928)

[1.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux 4](#_Toc31203929)

[2 Propriétés du produit scalaire 6](#_Toc31203930)

[2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire 6](#_Toc31203931)

[2.2 Produit scalaire dans une base orthonormée 6](#_Toc31203932)

[2.3 Norme et produit scalaire 7](#_Toc31203933)

[3 Applications du produit scalaire 7](#_Toc31203934)

[3.1 Formule d'Al-Kashi 7](#_Toc31203935)

[3.2 Cercle défini par un diamètre 8](#_Toc31203936)

CHAPITRE 11 : produit scalaire

# Produit scalaire

## Définition du produit scalaire

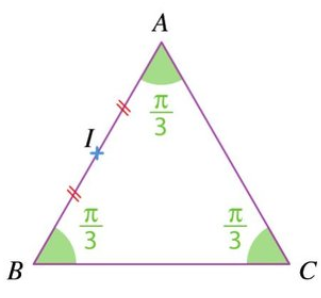
Pour tous vecteurs et **non nuls**,

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à zéro :

Pour tous vecteurs   et :

***Exemple :***

Soit un triangle équilatéral de côté . Calculer le produit scalaire .



Le triangle a pour côté donc .

D'autre part .

Donc le produit scalaire :

## Vecteurs colinéaires et carré scalaire

* Cas de deux vecteurs et colinéaires et de **même sens** :

|  |  |
| --- | --- |
| Or et  Donc |  |

* Cas de deux vecteurs et colinéaires et de **sens contraires** :

|  |  |
| --- | --- |
| Or et  Donc |  |

Conclusion :

* Si et sont **colinéaires et de même sens**, alors
* Si et sont **colinéaires et de sens contraires**, alors

***Remarque :***

Pour tous points et du plan :

* Le produit scalaire de par lui-même est appelé **carré scalaire de** et est noté :

Pour tout vecteur  :

## Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

***Définition :***

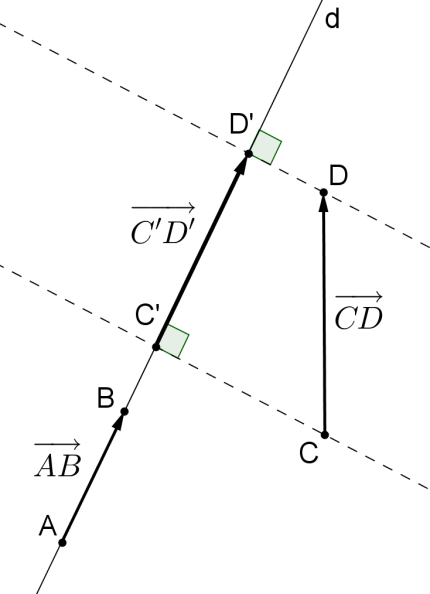
Le **projeté orthogonal** d’un point **sur une droite**  est le point d’intersection de la perpendiculaire à la droite passant par avec la droite .



***Propriété :***

Soit les points , , , et , avec et distincts.

Soit et les projetés orthogonaux des points et sur la droite . Alors :



***Conséquence :***

|  |  |
| --- | --- |
| Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l’un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l’autre**.  ***Exemple :***  Dans le rectangle , on a : |  |
| Pour calculer un produit scalaire, on ne peut pas remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d’un troisième**.  ***Exemple :***  Dans le rectangle , on n’a pas :  Mais on a : |  |

***Propriété :***

Soit trois points , et tels que et soient distincts.

Soit le projeté orthogonal de sur



Alors :

***Démonstration :***

C’est un cas particulier de la propriété précédente car a pour projeté lui-même.

***Remarques :***

|  |  |
| --- | --- |
| * Si appartient à la demi-droite , alors et sont colinéaires et de même sens, donc :   Conséquence :  Si l’angle est **aigu**, alors |  |
| * Si n’appartient pas à la demi-droite , alors et sont colinéaires et de sens contraires, donc :   Conséquence :  Si l’angle est **obtus**, alors |  |

***Propriété :***

équivaut à et sont **orthogonaux**.

# Propriétés du produit scalaire

## Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

* Le produit scalaire est **symétrique** :

Pour tous vecteurs et :

* Le produit scalaire est **linéaire à droite** :

Quels que soient les vecteurs , et et les réels et on a :

* Le produit scalaire est **linéaire à gauche** :

Quels que soient les vecteurs , et et les réels et on a :

***Exemples :***

## Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit une base orthonormée et deux vecteurs et . Alors :

est une base orthonormée du plan signifie que et que et .

***Exemple***

|  |  |
| --- | --- |
| Soit trois points , et dans un repère orthonormé.  Démontrer que le triangle est isocèle et rectangle en . |  |

*Réponse :*

On calcule les coordonnées des vecteurs et :

* et .

Donc . Donc est isocèle en .

* et sont orthogonaux donc est rectangle en .

## Norme et produit scalaire

Etant donnés deux vecteurs et , on a, d'après la remarque du §1.2 :

et donc :

Ainsi :

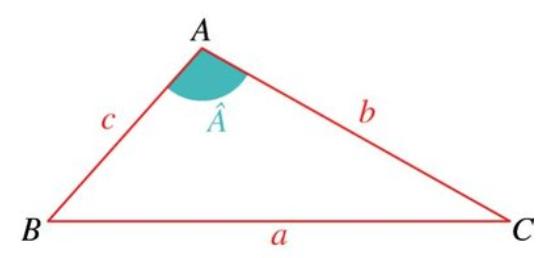
***Exemples :***

|  |  |
| --- | --- |
| * Calculer |  |
| * Calculer |  |

# Applications du produit scalaire

## Formule d'Al-Kashi

Al-Kashi : Mathématicien Perse du début du 15ème siècle.

Dans un triangle , avec les notations de la figure ci-contre, on a :

***Applications :***

Cette formule permet de calculer les angles connaissant les trois côtés.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Calculer l'angle .  *Réponse :* |  |

## Cercle défini par un diamètre

***Propriété :***

Un point appartient au cercle (C ) de diamètre et seulement si :

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Soit les points et dans le plan rapporté à un repère orthonormé . Déterminer une équation du cercle de diamètre .  *Réponse :*      équivaut successivement à : |  |

Conclusion : Le cercle de diamètre a comme équation