

# CHAPITRE 11 : Produit scalaire

---

1	Produit scalaire.....	2
1.1	Définition du produit scalaire.....	2
1.2	Vecteurs colinéaires et carré scalaire.....	3
1.3	Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux.....	4
2	Propriétés du produit scalaire.....	6
2.1	Symétrie et bilinéarité du produit scalaire.....	6
2.2	Produit scalaire dans une base orthonormée.....	6
2.3	Norme et produit scalaire.....	7
3	Applications du produit scalaire.....	7
3.1	Formule d'Al-Kashi.....	7
3.2	Cercle défini par un diamètre.....	8

# CHAPITRE 11 : produit scalaire

---

## 1 Produit scalaire

### 1.1 Définition du produit scalaire

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

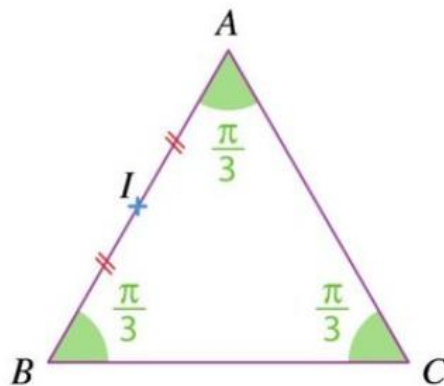
Si l'un des vecteurs est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à zéro :

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$$

#### Exemple :

Soit un triangle équilatéral  $ABC$  de côté 2. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ .



Le triangle a pour côté 2 donc  $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = 2$ .

D'autre part  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ .

Donc le produit scalaire :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 4 \times \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 2$$

## 1.2 Vecteurs colinéaires et carré scalaire

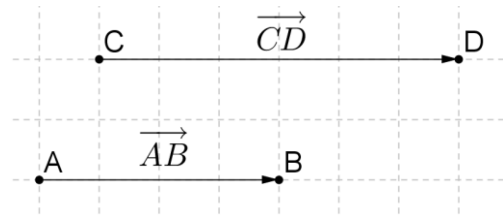
- Cas de deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  colinéaires et de **même sens** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Or  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$  et  $\cos(0) = 1$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\|$$



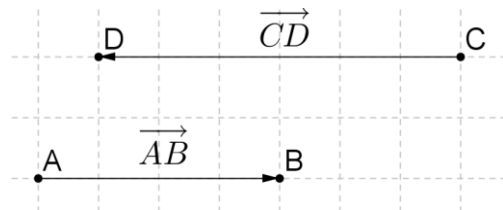
- Cas de deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  colinéaires et de **sens contraires** :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Or  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi$  et  $\cos(\pi) = -1$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\|$$



Conclusion :

- Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont **colinéaires et de même sens**, alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont **colinéaires et de sens contraires**, alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

**Remarque :**

Pour tous points  $A$  et  $B$  du plan :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

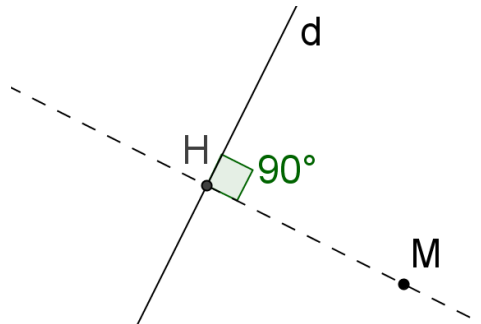
- Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par lui-même est appelé **carré scalaire de  $\vec{u}$**  et est noté  $\vec{u}^2$  :

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  :  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

### 1.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

**Définition :**

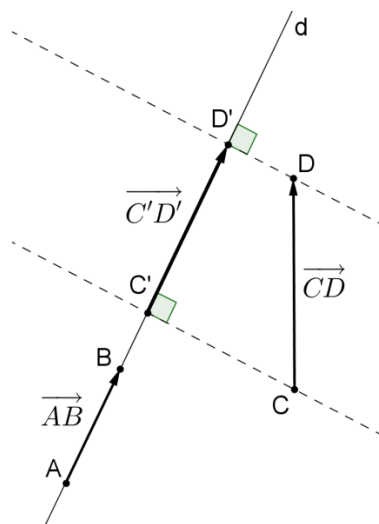
Le **projeté orthogonal  $H$**  d'un point  $M$  sur une droite  $d$  est le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite  $d$  passant par  $M$  avec la droite  $d$ .



**Propriété :**

Soit les points  $A, B, C$ , et  $D$ , avec  $A$  et  $B$  distincts.  
Soit  $C'$  et  $D'$  les projetés orthogonaux des points  $C$  et  $D$  sur la droite  $(AB)$ . Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$



**Conséquence :**

Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l'un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l'autre**.

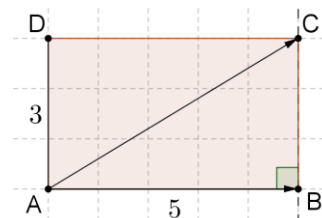
**Exemple :**


Dans le rectangle  $ABCD$ , on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$$



 Pour calculer un produit scalaire, on ne peut pas remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d'un troisième**.

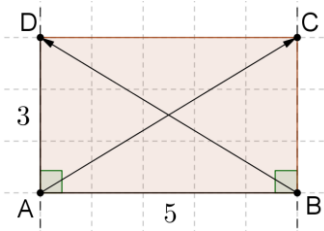
**Exemple :**

Dans le rectangle  $ABCD$ , on n'a pas :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BA}$$

Mais on a :  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{BD}$

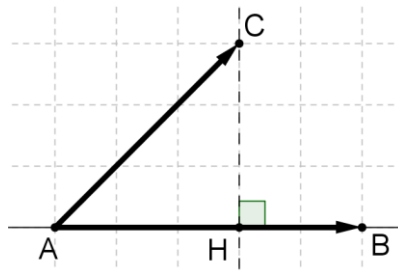
$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{BC} \cdot \vec{BD}$$



**Propriété :**

Soit trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $A$  et  $B$  soient distincts.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$



Alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

**Démonstration :**

C'est un cas particulier de la propriété précédente car  $A$  a pour projeté lui-même.

**Remarques :**

- Si  $H$  appartient à la demi-droite  $[AB)$ , alors  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH$$

Conséquence :

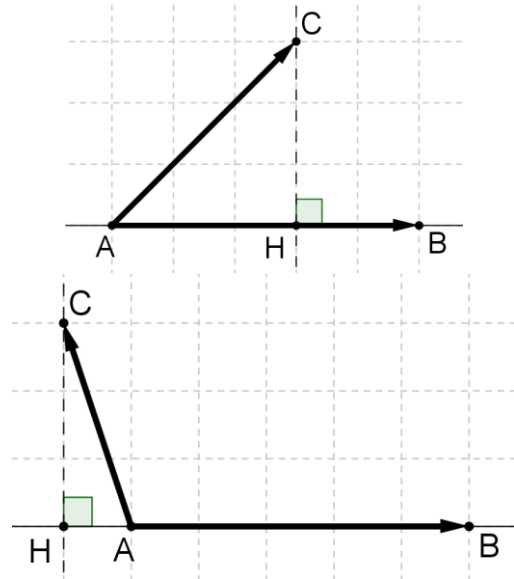
Si l'angle  $\widehat{BAC}$  est **aigu**, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0$

- Si  $H$  n'appartient pas à la demi-droite  $[AB)$ , alors  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont colinéaires et de sens contraires, donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AH} = -AB \times AH$$

Conséquence :

Si l'angle  $\widehat{BAC}$  est **obtus**, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$



**Propriété :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ équivaut à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

## 2 Propriétés du produit scalaire

### 2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

- Le produit scalaire est **symétrique** :

$$\text{Pour tous vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- Le produit scalaire est **linéaire à droite** :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et les réels  $k_1$  et  $k_2$  on a :

$$\vec{u} \cdot (k_1 \vec{v} + k_2 \vec{w}) = k_1 \vec{u} \cdot \vec{v} + k_2 \vec{u} \cdot \vec{w}$$

- Le produit scalaire est **linéaire à gauche** :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et les réels  $k_1$  et  $k_2$  on a :

$$(k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}) \cdot \vec{w} = k_1 \vec{u} \cdot \vec{w} + k_2 \vec{v} \cdot \vec{w}$$

#### Exemples :

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\vec{u} \cdot \vec{w} + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{a} \cdot (3\vec{b} - 5\vec{c}) = 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{s} \cdot (3\vec{s} + 8\vec{t}) = 3\vec{s} \cdot \vec{s} + 8\vec{s} \cdot \vec{t} = 3\|\vec{s}\|^2 + 8\vec{s} \cdot \vec{t}$$

### 2.2 Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Alors :

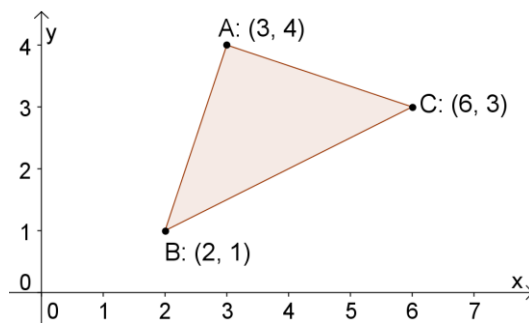
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée du plan signifie que  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et que  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 1$ .

#### Exemple

Soit trois points  $A(3; 4)$ ,  $B(2; 1)$  et  $C(6; 3)$  dans un repère orthonormé.

Démontrer que le triangle  $ABC$  est isocèle et rectangle en  $A$ .



*Réponse :*

On calcule les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-4 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$  et  $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ .

Donc  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$ . Donc  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1)(3) + (-3)(-1) = 0$ .  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux donc  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

## 2.3 Norme et produit scalaire

Etant donnés deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on a, d'après la remarque du §1.2 :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

et donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

Ainsi :

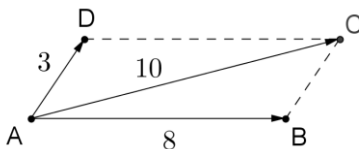
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

### Exemples :

- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



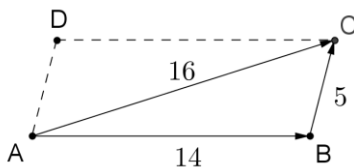
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (10^2 - 8^2 - 3^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{27}{2}$$

- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (16^2 - 14^2 - 5^2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{35}{2}$$

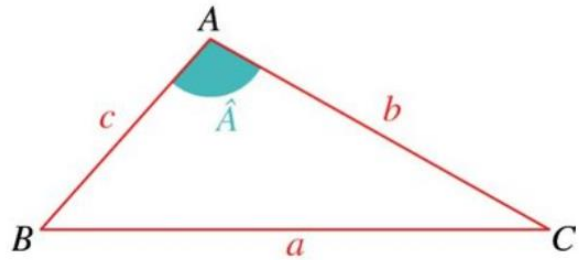
## 3 Applications du produit scalaire

### 3.1 Formule d'Al-Kashi

Al-Kashi : Mathématicien Perse du début du 15<sup>ème</sup> siècle.

Dans un triangle  $ABC$ , avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



**Applications :**

Cette formule permet de calculer les angles connaissant les trois côtés.

**Exemple :**

Calculer l'angle  $\hat{A}$ .

Réponse :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

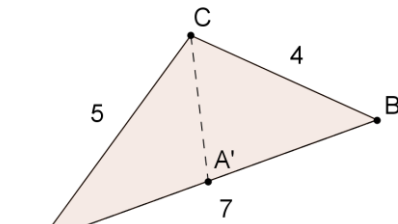
$$\cos \hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 7}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 7}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{29}{35}$$

$$\hat{A} = \cos^{-1} \frac{29}{35}$$

$$\hat{A} \approx 34,05^\circ$$



### 3.2 Cercle défini par un diamètre

**Propriété :**

Un point  $M(x ; y)$  appartient au cercle ( $\odot$ ) de diamètre  $[AB]$  et seulement si :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

**Exemple :**

Soit les points  $A(1 ; 2)$  et  $B(-2 ; 3)$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer une équation du cercle  $C$  de diamètre  $[AB]$ .

Réponse :

\*  $M(x ; y) \in C$

équivalent successivement à :

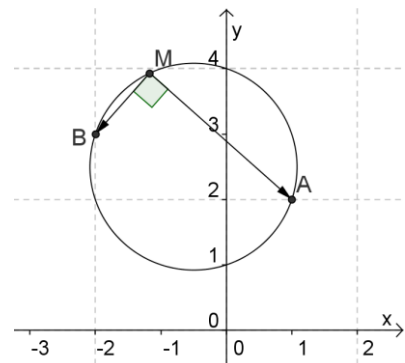
\*  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$\vec{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$  et  $\vec{MB} \begin{pmatrix} -2-x \\ 3-y \end{pmatrix}$

\*  $(1-x)(-2-x) + (2-y)(3-y) = 0$

\*  $-2-x+2x+x^2+6-2y-3y+y^2=0$

\*  $x^2+y^2+x-5y+4=0$



**Conclusion :** Le cercle  $C$  de diamètre  $[AB]$  a comme équation  $x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0$