Chapitre 4
Suites numériques – COURS

1. Modes de génération d'une suite

1.1 Définition par une fonction de n

- Les suites sont des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- On note (U_n) la suite (avec des parenthèses).
- On note U_n le réel qui est l'image de l'entier naturel n par la suite (U_n)

Exemple :
Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = (n-4)^2 - 2$.

Vocabulaire : On dit que U_n est le terme général de la suite.

1.2 Définition par une relation de récurrence

(du latin **recurrens** qui signifie revenir en arrière)
1. Signification dans le langage courant : qui revient, réapparaît, se reproduit.
2. Série récurrente : Suite dont le terme général s'exprime à partir du terme ou des termes le précédant.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \mathbf{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Le calcul des premiers termes se fait en remplaçant n par les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; ...

$U_{0+1} = \dfrac{1}{2}U_0 + 3 \quad U_1 = \dfrac{1}{2}U_0 + 3 \quad U_1 = \dfrac{1}{2} \times \mathbf{2} + 3 \quad U_1 = \mathbf{4}$

$U_{1+1} = \dfrac{1}{2}U_1 + 3 \quad U_2 = \dfrac{1}{2}U_1 + 3 \quad U_2 = \dfrac{1}{2} \times \mathbf{4} + 3 \quad U_2 = \mathbf{5}$

$U_{2+1} = \dfrac{1}{2}U_2 + 3 \quad U_3 = \dfrac{1}{2}U_2 + 3 \quad U_3 = \dfrac{1}{2} \times \mathbf{5} + 3 \quad U_3 = \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}$ ...

Remarque :

Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} V_0 = \mathbf{2} \\ V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + 3 \end{cases}$ est identique à la suite (U_n)

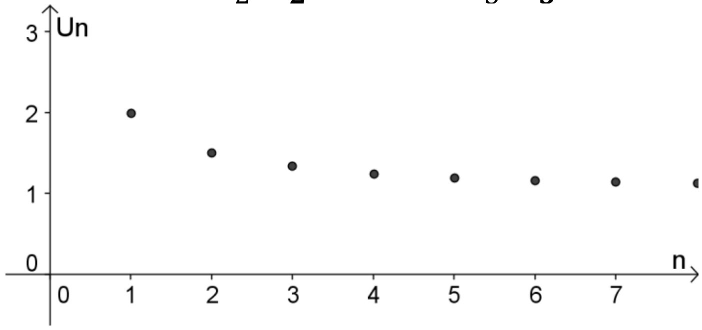
Le calcul des premiers termes se fait en remplaçant n par les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; ...

1.3 Représentation graphique

On représente les suites par des points dont les abscisses sont des entiers naturels (ce sont les valeurs de n).
Les ordonnées (ce sont les valeurs de U_n) sont des réels quelconques.

Exemple :
(U_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$

$U_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = \mathbf{2}\,; \quad U_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}; \quad U_3 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; \quad U_4 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$ ....



2. Suites arithmétiques, suites géométriques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition par une relation de récurrence	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ r est une constante appelée raison ***Exemple :*** $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$ q est une constante non nulle appelée raison ***Exemple :*** $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$
Définition en fonction de n à partir de u_0	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr$ ***Exemple :*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 10 - 2n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$ ***Exemple :*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 10 \times (-2)^n$
Définition en fonction de n à partir d'un terme u_p	Pour tout entier $n \geq p$: $u_n = u_p + (n-p)r$ ***Exemple :*** Pour tout entier $n \geq 5$: $u_n = u_5 - 2(n-5)$	Pour tout entier $n \geq p$: $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ***Exemple :*** Pour tout entier $n \geq 5$: $u_n = u_5 \times (-2)^{n-5}$
Somme de termes consécutifs	$S = \dfrac{(1^{er}\ ter. + dernier\ ter.) \times n^{bre}\ termes}{2}$ ***Exemple :*** $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$ $u_n = 10 - 2n$ $u_3 = 10 - 2 \times 3 = 4$ $u_9 = 10 - 2 \times 9 = -8$ $n^{bre}\ termes = 9 - 3 + \mathbf{1} = 7$ $S = \dfrac{(4 + (-8)) \times 7}{2}$ $S = -14$	$S = 1^{er}\ terme\ \times \dfrac{1 - q^{n^{bre}\ termes}}{1-q}$ ***Exemple :*** $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$ $u_n = 10 \times (-2)^n$ $u_3 = 10 \times (-2)^3 = -80$ $n^{bre}\ termes = 9 - 3 + \mathbf{1} = 7$ $S = -80\ \times \dfrac{1 -\ (-2)^7}{1-(-2)}$ $S = -80\ \times \dfrac{1 -\ (-128)}{3}$ $S = -80\ \times \dfrac{129}{3}$ $S = -3440$