21 PDS6

Exercice 1

1) $x+2\pi$ et x sont deux mesures du même angle.
Donc $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

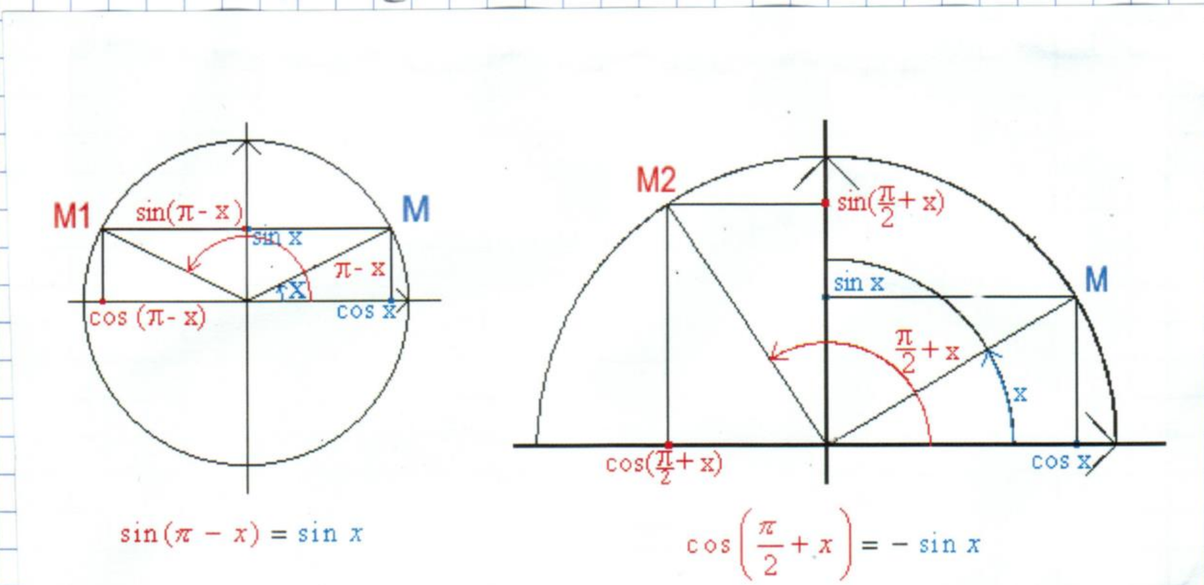
Réponse A

2) M' est diamétralement opposé à M donc l'angle $\widehat{MOM'}$ a pour mesure π. C'est un angle plat.
Puisque M est associé au réel x alors M' est associé au réel $\pi + x$

Réponse B

3) Soit M le point associé au réel x.
Considérons M_1 le point associé à $\pi - x$.
M_1 est symétrique de M par rapport à l'axe des sinus
Donc $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Considérons M_2 le point associé à $x + \frac{\pi}{2}$.
On a $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.



Donc $\sin(\pi - x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x - \sin x = 0$

Réponse B

4) $\sin(7\pi - x) = \sin(\pi - x + 3\times 2\pi)$ $\quad$ $3\times 2\pi$ représente 3 tours.
$\sin(7 - x) = \sin(\pi - x)$
$\sin(7 - x) = \sin x$ (voir la figure du 3)) $\quad$ Réponse C

5) $-\dfrac{23\pi}{3} = -\dfrac{24\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}$

$-\dfrac{23\pi}{3} = -8\pi + \dfrac{\pi}{3}$

$-23\dfrac{\pi}{3} = -4\times 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ $-4\times 2\pi$ représente -4 tours

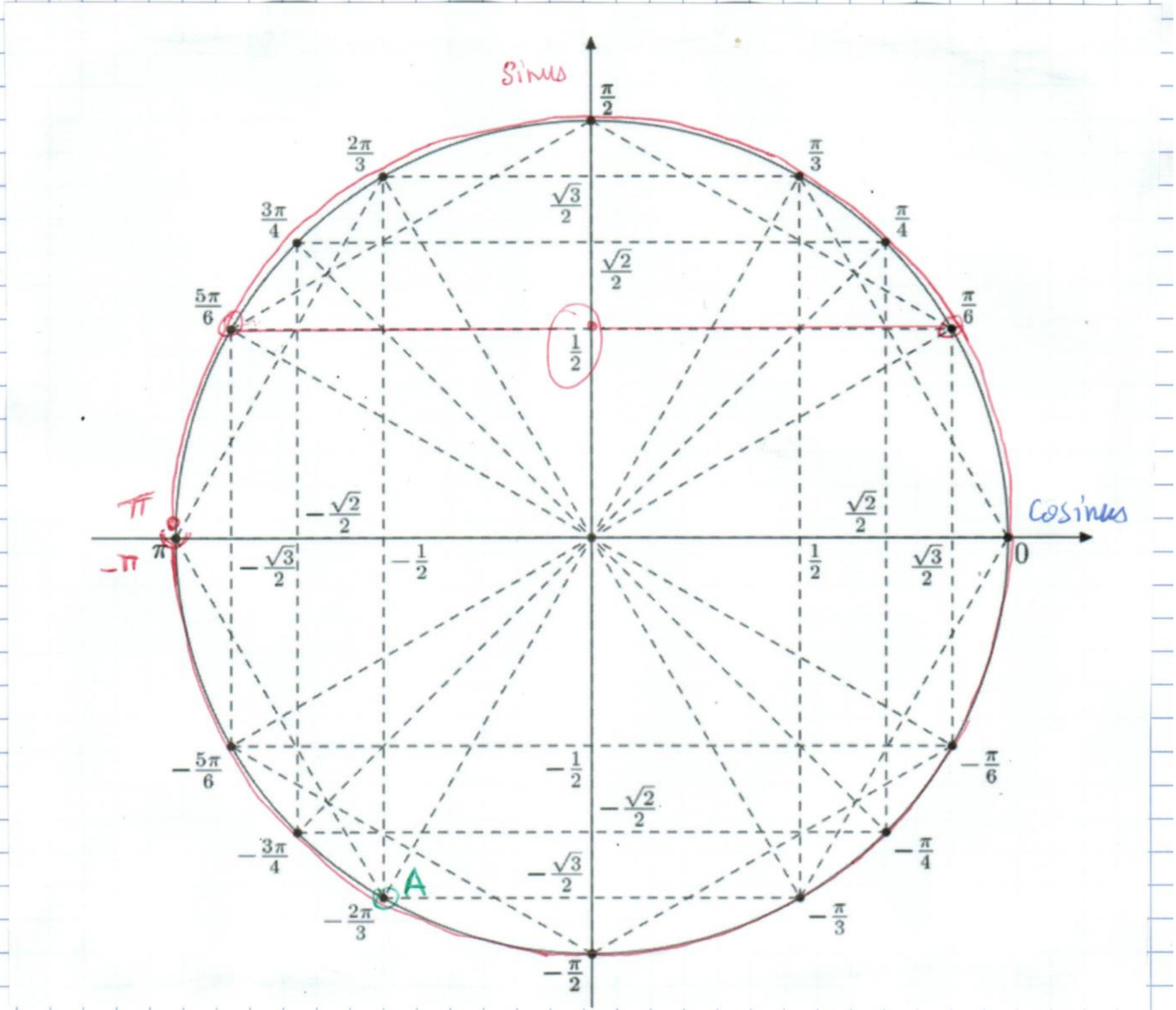
Donc le réel $-\dfrac{23\pi}{3}$ et le réel $\dfrac{\pi}{3}$ ont le même point image $\quad$ Réponse B

6) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deux angles x et $-x$ ont le même cosinus

$\cos(-x) = \cos(x)$ donc $\cos(-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Réponse A

7)



$\sin(x) = \frac{1}{2}$ a deux solutions sur $]-\pi ; \pi]$: $x = \frac{\pi}{6}$

et $x = \frac{5\pi}{6}$

Réponse D

8) Réponse C (voir le point A sur le graphique ci-dessus)

9) $t + 4\pi = t + 2\times 2\pi$ $2\times 2\pi$ représente 2 tours. Donc $\cos(t+4\pi) = \cos t$

$-t$ et t ont le même cosinus donc $\cos(-t) = \cos(t)$.

Donc $\cos(t+4\pi) + \cos(-t) = \cos(t) + \cos(t)$

$\cos(t+4\pi) + \cos(-t) = 2\cos(t) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ Réponse C

10) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin(\pi) = 0$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(\pi)$

Réponse C

Exercice 2

1) $u_2 = 3u_1 + 4$
$u_2 = 3(1) + 4$
$u_2 = 7$

$u_3 = 3u_2 + 4$
$u_3 = 3(7) + 4$
$u_3 = 25$

2)
```
def terme_u(n):
    u = 1
    for i in range(n-1):
        u = 3 * u + 4
    return u
```

3) a) Pour démontrer que la suite (V_n) est géométrique, on cherche à exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
On part de $V_n = u_n + 2$
Donc $V_{n+1} = u_{n+1} + 2$ et donc $V_{n+1} = (3u_n + 4) + 2$
On utilise $V_n = u_n + 2$ ce qui équivaut à $V_n - 2 = u_n$
Cela donne $V_{n+1} = (3(V_n - 2) + 4) + 2$
On simplifie : $V_{n+1} = 3V_n - 6 + 4 + 2$
$V_{n+1} = 3V_n$ pour tout entier $n \geq 1$
Conclusion : la suite (V_n) est géométrique | de 1er terme $V_1 = 1 + 2 = 3$
| de raison $q = 3$

b) D'après le résultat de la question précédente on a :
$V_n = V_1 \times q^{n-1}$
ce qui donne $V_n = 3 \times 3^{n-1}$ ou plus simplement $V_n = 3^n$
pour tout entier $n \geq 1$

c) On sait que $u_n = V_n - 2$
Or $V_n = 3^n$
Donc on a $u_n = 3^n - 2$ pour tout entier $n \geq 1$

4) Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$u_{n+1} - u_n = (3^{n+1} - 2) - (3^n - 2)$
$u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - \cancel{2} - 3^n + \cancel{2}$
$u_{n+1} - u_n = 3^n \times 3 - 3^n$. En factorisant : $u_{n+1} - u_n = 3^n(3-1)$
$u_{n+1} - u_n = 3^n \times 2$
Comme $3^n > 0$ et $2 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$
$u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq 1$. (u_n) est croissante

5) Après avoir programmé la fonction Python sur la calculatrice (ou en utilisant le mode SUITE) de la calculatrice, on a :

$u_{10} = 59\,047$

$u_{20} = 3\,486\,784\,399$

On conjecture que $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$