22P DS4

Exercice 1

1) $u_1 = 1$

$u_2 = 2 \times u_1$ $\quad u_2 = 2$

$u_3 = 2 \times u_2$ $\quad u_3 = 4$

$u_4 = 2 \times u_3$ $\quad u_4 = 8$

$u_5 = 2 \times u_4$ $\quad u_5 = 16$

2) $u_{n+1} = 2 u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) a) la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = 1$ de raison $q = 2$

b) $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) Soit N ce nombre. $N = u_1 + u_2 + \dots + u_{64}$

Puisque la suite (u_n) est géométrique :

$$N = u_1 \times \frac{1 - q^{64}}{1 - q}$$

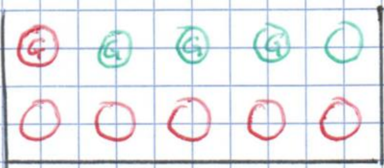
$$N = 1 \times \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \qquad N = \frac{1 - 2^{64}}{-1} \qquad N = 2^{64} - 1$$

Le vieux sage recevra $2^{64} - 1$ grains de riz soit environ $1,84 \times 10^{19}$

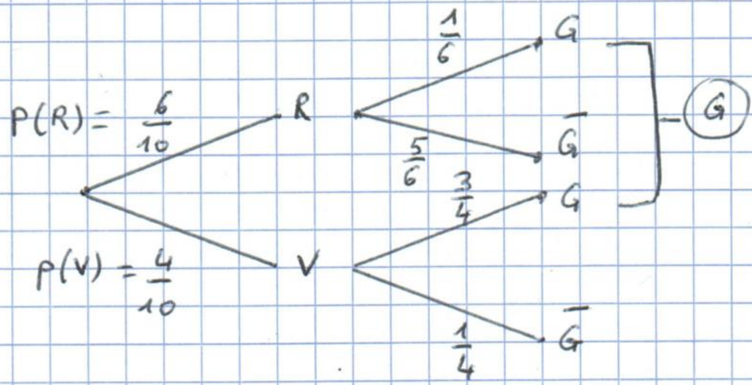
5)

```
def nb_cases(R):
    case = 1
    u = 1
    somme = u
    while somme < R:
        u = 2 * u
        somme = somme + u
        case = case + 1
    return case
```

Exercice 2



1)



2) On cherche $P(V \cap G)$

$p(V \cap G) = p(V) \times p_V(G)$

$p(V \cap G) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\underline{p(V \cap G) = \frac{3}{10}}$

3) R et V forment une partition de l'univers.
Donc, selon la formule des probabilités totales :

$P(G) = P(R \cap G) + p(V \cap G)$

$P(G) = p(R) \times P_R(G) + p(V) \times P_V(G)$

$P(G) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10}$ $\qquad$ $P(G) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$ $\qquad$ $\underline{P(G) = \frac{2}{5}}$

4) On cherche $P_G(R)$

$P_G(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)}$

$P_G(R) = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{5}}$ $\qquad$ $P_G(R) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}$ $\qquad$ $P_G(R) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2}$ $\qquad$ $\underline{P_G(R) = \frac{1}{4}}$

5) Pour savoir si les évènements V et G sont indépendants, on va tester l'égalité $P(V \cap G) = P(V) \times P(G)$.

On a $P(V \cap G) = \frac{3}{10}$ (d'après la question 2))

$P(V) = \frac{4}{10}$ et $P(G) = \frac{2}{5}$ (d'après la question 3)).

$P(V) \times P(G) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$ $\qquad$ donc $P(V \cap G) \neq P(V) \times P(G)$

Conclusion : <u>V et G ne sont pas indépendants.</u>

Exercice 3

1) $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$

2) Soit T_0 cette tangente.
T_0 a une équation de la forme $y = f(0) + f'(0)(x-0)$
On a :
$f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$ donc $f(0) = -19$
et
$f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$ donc $f'(0) = 11$

Donc T_0 a pour équation $y = -19 + 11(x-0)$ $\underline{y = 11x - 19}$

3) a) $(1)^3 + 7(1)^2 + 11(1) - 19 = 1 + 7 + 11 - 19 = 0$
Donc
1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$

b) Soit $A = (x-1)(x^2 + 8x + 19)$
$A = x^3 + 8x^2 + 19x - x^2 - 8x - 19$
$A = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$
Conclusion :
$(x-1)(x^2 + 8x + 19) = f(x)$

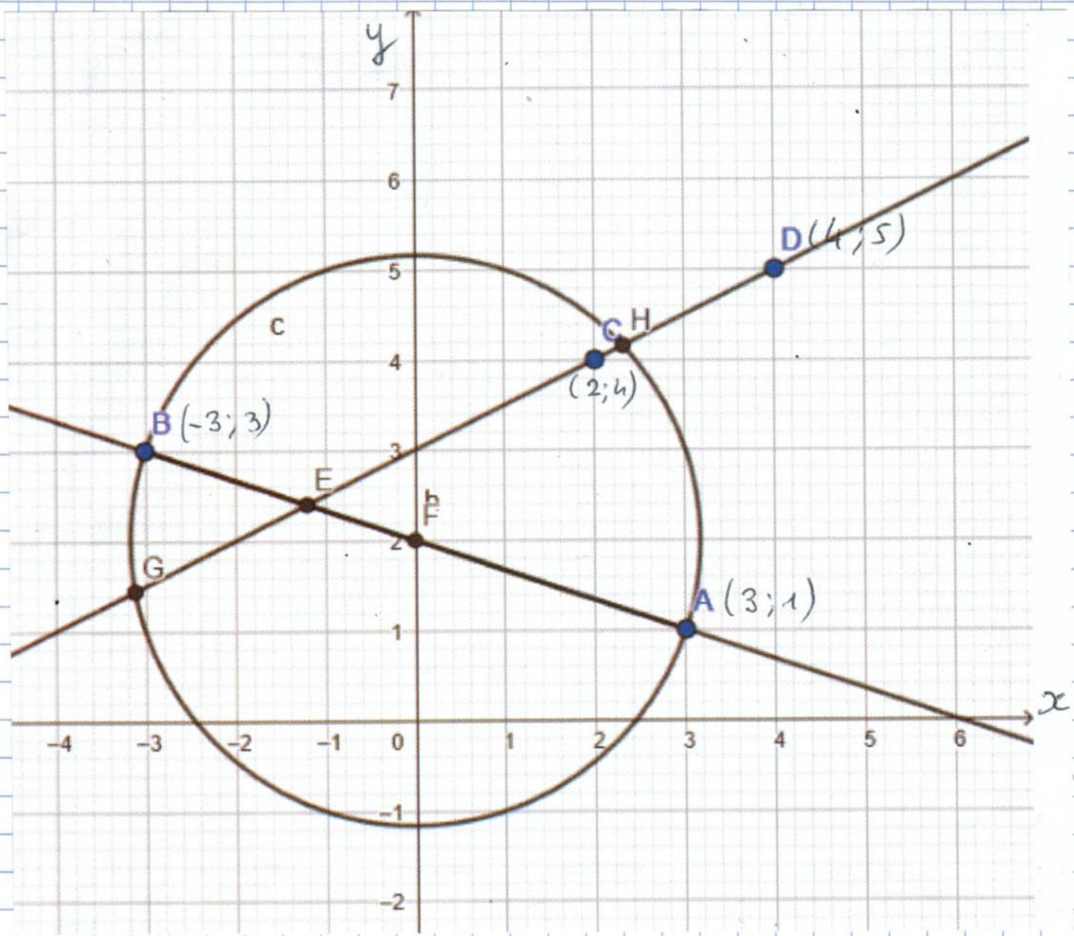
4) Etude du signe de $x^2 + 8x + 19$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(19)$
$\Delta = 64 - 76$
$\Delta = -12$ $\Delta < 0$ donc pas de racine.
$x^2 + 8x + 19$ est du signe de $a = 1$ c'est-à-dire positif pour tout réel x.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de $x^2 + 8x + 19$		$+$		$+$	
signe de $(x-1)(x^2+8x+19)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4



1) Soit l'équation $x+3y-6=0$ l'équation d'une droite

$A(3;1)$ $\quad (3)+3(1)-6=0$ est vrai donc A est sur la droite

$B(-3;3)$ $\quad (-3)+3(3)-6=0$ est vrai donc B est sur la droite

Conclusion : Cette droite est la droite (AB)

2) $\vec{CD}\begin{pmatrix}4-2\\5-4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ On sait qu'une droite d'équation $ax+by+c=0$ a comme vecteur directeur $\vec{v_d}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases}-b=2\\a=1\end{cases}$ $\quad \begin{cases}b=-2\\a=1\end{cases}$ $\quad$ Donc (CD) a pour équation $x-2y+c=0$

calcul de c :

le point $C(2;4)$ est sur la droite donc $2-2(4)+c=0$

$c=-2+8=6$

Donc la droite (CD) a pour équation $x-2y+6=0$

3) Les coordonnées $(x;y)$ de E vérifient le système $\begin{cases}x+3y-6=0\\x-2y+6=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=-3y+6\\-3y+6-2y+6=0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=-3y+6\\-5y+12=0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=-3\left(\frac{12}{5}\right)+6\\y=\frac{12}{5}\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=-\frac{6}{5}\\y=\frac{12}{5}\end{cases}$

Donc $E\left(-\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$ ou encore $E(-1{,}2\ ;\ 2{,}4)$

4) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3-3\\3-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ $\quad AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{(-6)^2+(2)^2}$ $\quad AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

b) $F\left(\frac{3+(-3)}{2}\ ;\ \frac{1+3}{2}\right)$ $\quad F(0;2)$

c) $\mathcal{C}$ a pour centre F et pour rayon $\frac{AB}{2}=\sqrt{10}$. Donc $\mathcal{C}$ a pour équation

$(x-0)^2+(y-2)^2=(\sqrt{10})^2$

$x^2+(y-2)^2=10$ $\quad x^2+y^2-4y-6=0$

5) Les coordonnées $(x;y)$ des points d'intersection de (CD) avec $\mathcal{C}$ vérifient le système

$$\begin{cases} x-2y+6=0 \\ x^2+y^2-4y-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y-6 \\ (2y-6)^2+y^2-4y-6=0 \end{cases}$$

On résout l'équation $(2y-6)^2+y^2-4y-6=0$

$4y^2-24y+36+y^2-4y-6=0$

$5y^2-28y+30=0$

$\Delta=(-28)^2-4(5)(30)$

$\Delta=184$

$\Delta>0$ donc il y a 2 racines :

$y_1=\dfrac{-(-28)-\sqrt{184}}{2(5)}$ et $y_2=\dfrac{-(-28)+\sqrt{184}}{2(5)}$

$y_1=\dfrac{14-\sqrt{46}}{5}$ et $y_2=\dfrac{14+\sqrt{46}}{5}$

$$\begin{cases} x=2y-6 \\ y=\dfrac{14-\sqrt{46}}{5} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=2y-6 \\ y=\dfrac{14+\sqrt{46}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{28-2\sqrt{46}}{5}-\dfrac{30}{5} \\ y=\dfrac{14-\sqrt{46}}{5} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{28+2\sqrt{46}}{5}-\dfrac{30}{5} \\ y=\dfrac{14+\sqrt{46}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2-2\sqrt{46}}{5} \approx -3{,}11 \\ y=\dfrac{14-\sqrt{46}}{5} \approx 1{,}44 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-2+2\sqrt{46}}{5} \approx 2{,}31 \\ y=\dfrac{14+\sqrt{46}}{5} \approx 4{,}16 \end{cases}$$

Les points d'intersection de la droite (CD) avec le cercle $\mathcal{C}$ sont :

$G\left(\dfrac{-2-2\sqrt{46}}{5};\dfrac{14-\sqrt{46}}{5}\right)$ et $H\left(\dfrac{-2+2\sqrt{46}}{5};\dfrac{14+\sqrt{46}}{5}\right)$