22PDS5

Exercice 1

1) Le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente.
On lit les coefficients directeurs des tangentes.
On peut aussi les calculer puisqu'on connait les coordonnées de deux points de chaque droite.

- Droite (EF)
Son coefficient directeur $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{-1-3}{0-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Ainsi le nombre dérivé $f'(2) = 2$

- Droite (GH)
Son coefficient directeur $\dfrac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \dfrac{0-3}{5-4} = \dfrac{-3}{1} = -3$

Ainsi le nombre dérivé $\boxed{f'(4) = -3}$ Réponse D

2) Le cercle Γ (lire "gamma") a pour diamètre $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(1-(-7))^2 + (-2-4)^2}$

$AB = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$ $AB = \sqrt{100}$ $AB = 10$

Le diamètre vaut 10 donc le rayon vaut 5.
Donc une équation du cercle est $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = 5^2$
où I est le centre du cercle.

- Calcul des coordonnées de I : I est le milieu de [AB]
$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ $I\left(\dfrac{-7+1}{2} ; \dfrac{4-2}{2}\right)$ $I(-3 ; 1)$

D'où le cercle Γ a pour équation $(x-(-3))^2 + (y-1)^2 = 5^2$
$\boxed{(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25}$ Réponse B

3) La droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 2y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

La droite $\mathcal{D}'$ d'équation $6x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
On en déduit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Sont-elles confondues ?

On a : $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 6x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = -2y + 1 \\ 2(-2y+1) + 4y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = -2y + 1 \\ -4y + 2 + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

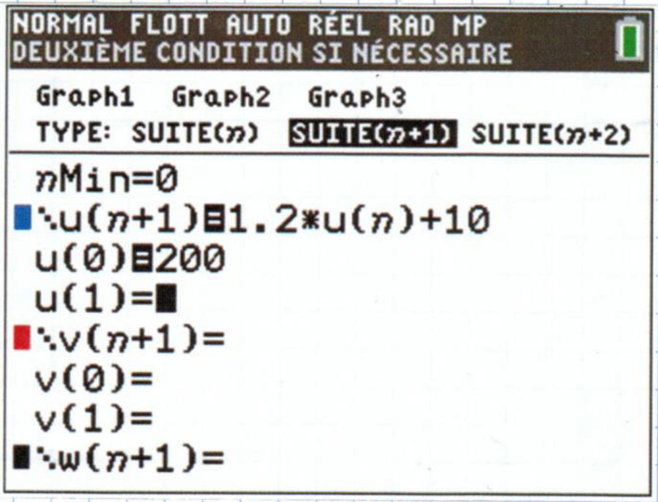
$\begin{cases} 3x = -2y + 1 \\ 4 = 0 \text{ impossible} \end{cases}$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont aucun point commun.
Elles sont strictement parallèles. Réponse C.

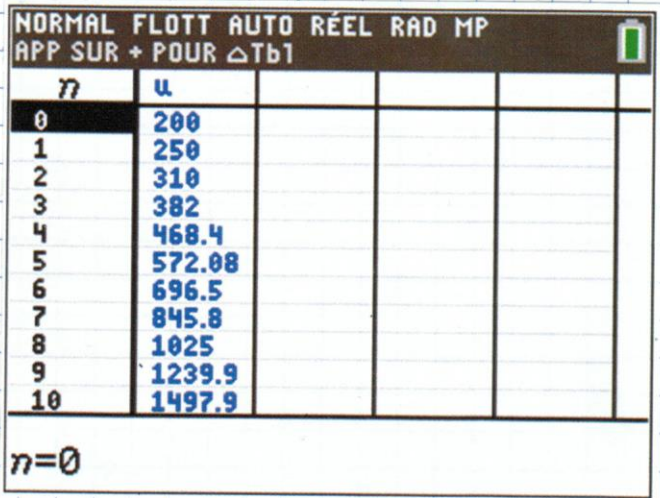
4) Ce programme permet de calculer les premiers termes de la suite (i_n) définie par $\begin{cases} i_0 = 200 \\ i_{n+1} = 1{,}2\, i_n + 10 \end{cases}$

Il renvoie la valeur du premier indice n pour lequel la valeur $i_n \geq k$. Le QCM explore les valeurs 300, 400, 500, 600 pour k.

On programme la suite (u_n) à la calculatrice :



On affiche la table des premiers termes :



- le 1er indice pour lequel $u_n \geqslant 300$ est 2 donc evolu(300) renvoie 2.
- le 1er indice pour lequel $u_n \geqslant 400$ est 4 donc evolu(400) renvoie 4.
- le 1er indice pour lequel $u_n \geqslant 500$ est 5 donc evolu(500) renvoie 5.
- le 1er indice pour lequel $u_n \geqslant 600$ est 6 donc evolu(600) renvoie 6.

Réponse D

Remarque : On peut aussi saisir le programme en Python sur la calculatrice.

5) $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ donc $1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ sont les 16 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1, raison $q = \frac{1}{2}$

Donc la valeur exacte de S est $1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1-\frac{1}{2}}$

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right)$$

$S = 2 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$ $\quad$ $S = 2 - \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ $\quad$ $S = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \simeq 1,999969482421875$

Réponse B

Exercice 2

1) h est dérivable sur $[0;26]$

$h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$

2) a) $\mathcal{C}$ est la courbe $\mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}'$ est la courbe $\mathcal{C}_1$

b) h' est une fonction polynôme du 2^e degré donc sa courbe est une parabole. le coefficient $a = -3$ $a<0$ donc la parabole est tournée vers le bas.

3) (T) a pour équation $y = h(0) + h'(0)(x-0)$

$h(0) = -0^3 + 30(0)^2 - 108(0) - 490$ $\quad h(0) = -490$

$h'(0) = -3(0)^2 + 60(0) - 108$ $\quad h'(0) = -108$

Donc (T) a pour équation $y = -490 - 108(x-0)$

$y = -108x - 490$

4) Etude du signe de $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$

$\Delta = 60^2 - 4(-3)(-108)$

$\Delta = 2304$

$\Delta = 48^2$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes.

$x_1 = \dfrac{-60-48}{2(-3)}$ $\quad x_1 = 18$

$x_2 = \dfrac{-60+48}{2(-3)}$ $\quad x_2 = 2$

x	0		2		18		26
signe de $-3x^2+60x-108$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de h	-490	$\searrow$	-594	$\nearrow$	1454	$\searrow$	-594

Exercice 3

1) $d_2 = 1{,}05\, d_1$ $\quad d_2 = 1{,}05 \times 20$ $\quad \underline{d_2 = 21}$

$d_3 = 1{,}05\, d_2$ $\quad d_3 = 1{,}05 \times 21$ $\quad \underline{d_3 = 22{,}05}$

2) $d_{n+1} = 1{,}05\, d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) La suite (d_n) est géométrique de premier terme $d_1 = 20$ et de raison $q = 1{,}05$

On sait que $d_n = d_1 \times q^{n-1}$

Donc $\underline{d_n = 20 \times 1{,}05^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

4) Lors du 10^e entraînement, Bob court $d_{10} = 20 \times 1{,}05^9$

$d_{10} = 31{,}02656$ km

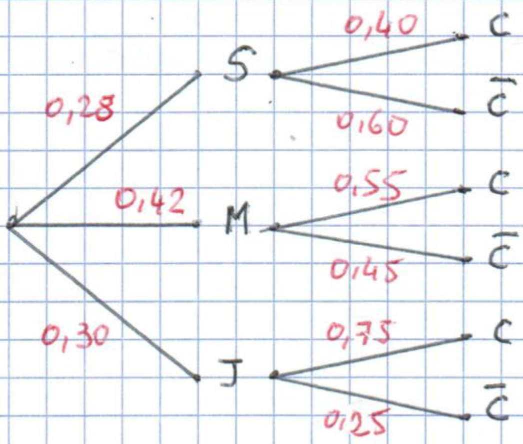
$\underline{d_{10} = 31{,}027 \text{ km}}$

5)

```
n = 1
d = 20
while d < 43 :
    n = n + 1
    d = 1.05 * d
```

Exercice 4

1)



2) L'évènement $M \cap \overline{C}$ est l'évènement : "la personne interrogée a entre 25 et 60 ans et ne connait pas le produit"

$p(M \cap \overline{C}) = p(M) \times p_M(\overline{C})$

$p(M \cap \overline{C}) = 0{,}42 \times 0{,}45$ $\quad \underline{p(M \cap \overline{C}) = 0{,}189}$

3) a) $p(S \cap C) = p(S) \times p_S(C)$

$p(S \cap C) = 0{,}28 \times 0{,}40$ $\quad \underline{p(S \cap C) = 0{,}112} = \frac{14}{125}$

b) S, M, J forment une partition de l'univers
Selon la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(S \cap C) + P(M \cap C) + P(J \cap C)$

$P(C) = 0{,}28 \times 0{,}40 + 0{,}42 \times 0{,}55 + 0{,}30 \times 0{,}75$

$\underline{P(C) = 0{,}568} = \frac{71}{125}$

4) On cherche $P_C(S)$

$P_C(S) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)}$

$P_C(S) = \dfrac{0{,}112}{0{,}568}$

$\underline{P_C(S) = 0{,}197} = \frac{14}{71}$