Chapitre 5 Géométrie repérée – COURS

1 Rappels sur les droites

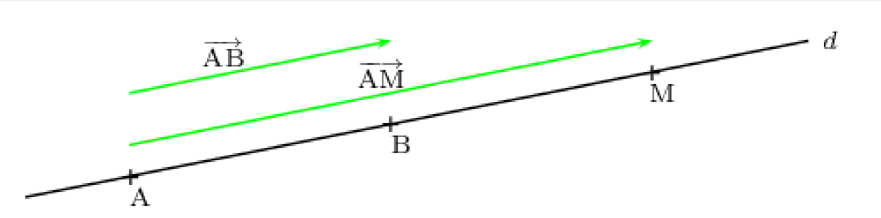
Définition

Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si

- soit l'un des deux vecteurs est nul
- soit les deux vecteurs ont la même direction.

Propriété

Soient A et B deux points distincts d'une droite d.
M appartient à la droite d si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}$ est **un vecteur directeur** de la droite d.



***Remarque**:*
Une droite peut être définie par 2 points distincts.
Une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur (nécessairement non nul).

Propriété

Deux droites sont **parallèles**
si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs **colinéaires**.

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ deux vecteurs et λ un réel.
alors: $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\,(x+x'\,;\,y+y')}$ et $\boxed{\lambda\vec{u}\,(\lambda x\,;\,\lambda y)}$.

Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.
alors: $\boxed{\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)}$;

si $I(x_I;y_I)$ est le **milieu** de [AB],
alors: $\boxed{x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A+y_B}{2}}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ deux vecteurs.
Le **déterminant** du couple $(\vec{u};\vec{v})$ est le réel $\boxed{xy'-x'y}$

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ deux vecteurs
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si le **déterminant** du couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est nul.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si $\vec{u}(-b\,;\,a)$ est un **vecteur directeur de la droite** d,
alors d admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité $ax + by + c = 0$ (avec a et b non nuls ensembles) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$.

2 Equation d'un cercle défini par centre et rayon

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Propriété et définitions :

Soit A un point.
Le cercle de centre A et de rayon r $(r > 0)$ est l'ensemble des points M tels que : $AM = r$.
On en déduit la propriété suivante :

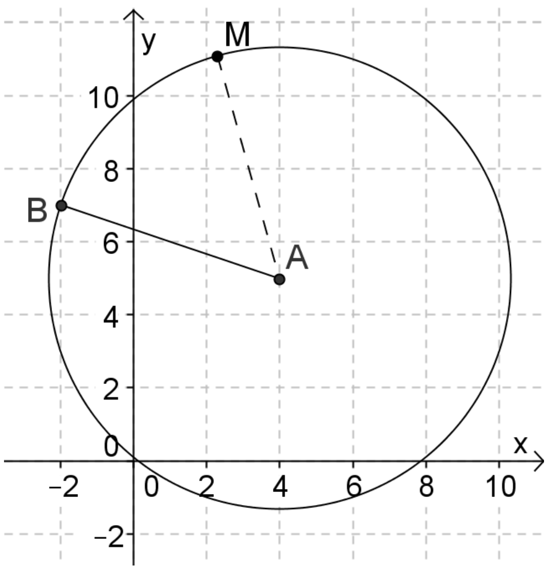
Un point $M(x\,;y)$ appartient au cercle (C) de centre $A(x_A\,;y_A)$ et de rayon r si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2.$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du cercle (C).

2.1 Méthode : Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.

Exemple 1 :
Soit les points $A(4\,;5)$ et $B(-2\,;\,7)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer une équation du cercle C de centre A passant par B.



Réponse :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-4\\7-5\end{pmatrix} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$$

- $M(x\,;y) \in C$

équivaut successivement à :

- $AM = r$
- $\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2}$
- $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 40$
- $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 40$
- $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

Conclusion : Le cercle C a comme équation $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$.

Exemple 2 :

3 CAPACITÉ

Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(2 ; –3) et de rayon 4.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
2. a. Le point B(6 ; –2) appartient-il à $\mathscr{C}$?
   b. Déterminer les coordonnées des points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.

Solution commentée

1. Soit un point M de coordonnées $(x\,;y)$.
M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, AM = 4 donc si, et seulement si, $AM^2 = 4^2$.
Or, $AM^2 = (x-2)^2 + (y-(-3))^2$. Donc M appartient à $\mathscr{C}$ équivaut à $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.
On peut aussi écrire cette équation ainsi :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16, \text{ soit } x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

2. a. $(x_B - 2)^2 + (y_B + 3)^2 = (6-2)^2 + (-2+3)^2 = 4^2 + 1^2 = 17$ et $17 \neq 16$.
Les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de $\mathscr{C}$ donc B n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
b. L'ordonnée y des points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 vérifie $(2-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.
On résout l'équation $(y+3)^2 = 16$:
$(y+3)^2 = 16$ équivaut à $y + 3 = -4$ ou $y + 3 = 4$, soit $y = -7$ ou $y = 1$.
Les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 sont les points de coordonnées (2 ; –7) et (2 ; 1).
Remarque : On aurait pu utiliser l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

2.2 Méthode : Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.

On écrit le polynôme en x comme début d'une identité remarquable.
De même pour le polynôme en y.
Puis on met sous la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Exemple 1 :

Déterminer l'ensemble E des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.

Réponse :

$x^2 - 2x$ est le début de $(x-1)^2 = \boldsymbol{x^2 - 2x} + 1$

$y^2 + 8y$ est le début de $(y+4)^2 = \boldsymbol{y^2 + 8y} + 16$

* $M(x\,;y) \in E$

équivaut successivement à :

* $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$
* $(x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 - 6 = 0$
* $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 23$
* $(x-1)^2 + (y+4)^2 = \left(\sqrt{23}\right)^2$
* $\left(x-(1)\right)^2 + \left(y-(-4)\right)^2 = \left(\sqrt{23}\right)^2$

Conclusion :

l'ensemble E est le cercle de centre $A(1\,;\,-4)$ et de rayon $r = \sqrt{23}$.

Exemple 2 :

CAPACITÉ 4

Reconnaître une équation de cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ?
Si oui, déterminer le centre et le rayon du cercle.

1. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$

Solution commentée

1 On cherche à écrire l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ sous la forme $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = k$, où k est un réel.
Comme $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et $y^2 + 8y = (y+4)^2 - 16$,
$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ équivaut à $(x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 + 8 = 0$,
donc à $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$, soit $(x-1)^2 + (y-(-4))^2 = 3^2$.
$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ est donc une équation du cercle de centre $A(1\,;-4)$ et de rayon 3.

2 En procédant comme dans la question précédente, l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$ peut s'écrire $(x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 + 19 = 0$, soit $(x-1)^2 + (y+4)^2 = -2$.
Le premier membre de l'équation est la somme de deux carrés, donc il est positif.
Puisque le second membre est strictement négatif, aucun couple $(x\,;y)$ ne vérifie
$(x-1)^2 + (y+4)^2 = -2$.
Ainsi, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$ est l'ensemble vide.