CHAPITRE 11 : Produit scalaire

[1 Produit scalaire 2](#_Toc123160209)

[1.1 Définition du produit scalaire 2](#_Toc123160210)

[1.2 Vecteurs colinéaires et carré scalaire 3](#_Toc123160211)

[1.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux 4](#_Toc123160212)

[2 Propriétés du produit scalaire 6](#_Toc123160213)

[2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire 6](#_Toc123160214)

[2.2 Produit scalaire dans une base orthonormée 6](#_Toc123160215)

[2.3 Norme et produit scalaire 7](#_Toc123160216)

[3 Applications du produit scalaire 7](#_Toc123160217)

[3.1 Formule d'Al-Kashi 7](#_Toc123160218)

[3.2 Cercle défini par un diamètre 8](#_Toc123160219)

[3.3 Equation d’une droite à l’aide d’un vecteur normal 9](#_Toc123160220)

[ ***Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal*** 10](#_Toc123160221)

[ ***Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d’un point sur une droite*** 10](#_Toc123160222)

[ ***Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration*** 11](#_Toc123160223)

CHAPITRE 11 : produit scalaire

# Produit scalaire

## Définition du produit scalaire

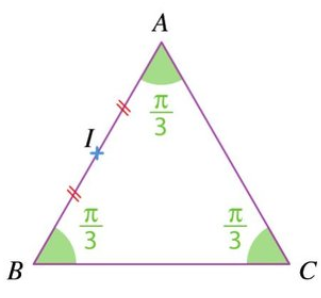
Pour tous vecteurs et **non nuls**,

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à zéro :

Pour tous vecteurs   et :

***Exemple :***

Soit un triangle équilatéral de côté . Calculer le produit scalaire .



Le triangle a pour côté donc .

D'autre part .

Donc le produit scalaire :

## Vecteurs colinéaires et carré scalaire

* Cas de deux vecteurs et colinéaires et de **même sens** :

|  |  |
| --- | --- |
| Or et  Donc |  |

* Cas de deux vecteurs et colinéaires et de **sens contraires** :

|  |  |
| --- | --- |
| Or et  Donc |  |

Conclusion :

* Si et sont **colinéaires et de même sens**, alors
* Si et sont **colinéaires et de sens contraires**, alors

***Remarque :***

Pour tous points et du plan :

* Le produit scalaire de par lui-même est appelé **carré scalaire de** et est noté :

Pour tout vecteur  :

## Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

***Définition :***

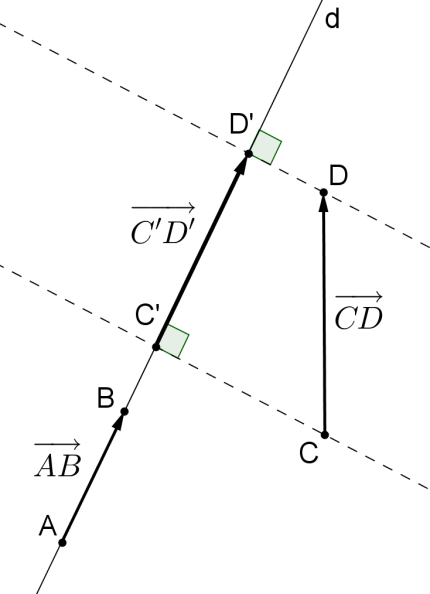
Le **projeté orthogonal** d’un point **sur une droite**  est le point d’intersection de la perpendiculaire à la droite passant par avec la droite .



***Propriété :***

Soit les points , , , et , avec et distincts.

Soit et les projetés orthogonaux des points et sur la droite . Alors :



***Conséquence :***

|  |  |
| --- | --- |
| Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l’un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l’autre**.  ***Exemple :***  Dans le rectangle , on a : |  |
| Pour calculer un produit scalaire, on ne peut pas remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d’un troisième**.  ***Exemple :***  Dans le rectangle , on n’a pas :  Mais on a : |  |

***Propriété :***

Soit trois points , et tels que et soient distincts.

Soit le projeté orthogonal de sur



Alors :

***Démonstration :***

C’est un cas particulier de la propriété précédente car a pour projeté lui-même.

***Remarques :***

|  |  |
| --- | --- |
| * Si appartient à la demi-droite , alors et sont colinéaires et de même sens, donc :   Conséquence :  Si l’angle est **aigu**, alors |  |
| * Si n’appartient pas à la demi-droite , alors et sont colinéaires et de sens contraires, donc :   Conséquence :  Si l’angle est **obtus**, alors |  |

***Propriété :***

équivaut à et sont **orthogonaux**.

# Propriétés du produit scalaire

## Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

* Le produit scalaire est **symétrique** :

Pour tous vecteurs et :

* Le produit scalaire est **linéaire à droite** :

Quels que soient les vecteurs , et et les réels et on a :

* Le produit scalaire est **linéaire à gauche** :

Quels que soient les vecteurs , et et les réels et on a :

***Exemples :***

## Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit une base orthonormée et deux vecteurs et . Alors :

est une base orthonormée du plan signifie que et que et .

***Exemple***

|  |  |
| --- | --- |
| Soit trois points , et dans un repère orthonormé.  Démontrer que le triangle est isocèle et rectangle en . |  |

*Réponse :*

On calcule les coordonnées des vecteurs et :

* et .

Donc . Donc est isocèle en .

* et sont orthogonaux donc est rectangle en .

## Norme et produit scalaire

Etant donnés deux vecteurs et , on a, d'après la remarque du §1.2 :

et donc :

Ainsi :

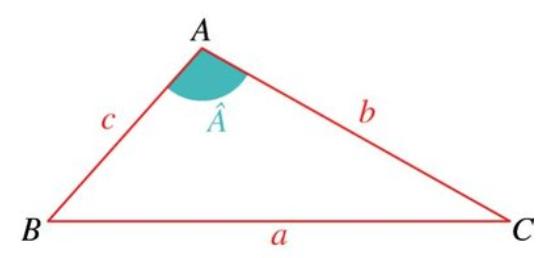
***Exemples :***

|  |  |
| --- | --- |
| * Calculer |  |
| * Calculer |  |

# Applications du produit scalaire

## Formule d'Al-Kashi

Al-Kashi : Mathématicien Perse du début du 15ème siècle.

Dans un triangle , avec les notations de la figure ci-contre, on a :

***Applications :***

Cette formule permet de calculer les angles connaissant les trois côtés.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Calculer l'angle .  *Réponse :* |  |

## Cercle défini par un diamètre

***Propriété :***

Un point appartient au cercle (C ) de diamètre et seulement si :

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Soit les points et dans le plan rapporté à un repère orthonormé . Déterminer une équation du cercle de diamètre .  *Réponse :*      équivaut successivement à : |  |

Conclusion : Le cercle de diamètre a comme équation

## Equation d’une droite à l’aide d’un vecteur normal

Le plan est muni d’un repère orthonormé .

***Définition :***

Un vecteur normal à une droite est **un vecteur non nul et orthogonal** à tout vecteur directeur de .

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  est un vecteur normal à la droite |  |

***Propriétés :***

|  |
| --- |
| Soit une droite et soit un vecteur non nul.   * Si est un vecteur normal à , alors tout vecteur non nul colinéaire à est un vecteur normal à . * Tout vecteur normal à est orthogonal à tout vecteur directeur de . |

***Propriété :***

Soit une droite passant par un point et de vecteur normal .

Un point appartient à si et seulement si :

|  |  |
| --- | --- |
| ***Exemple :***  Soit la droite passant par le point et de vecteur normal .  Soit le point  Le point appartient donc à | Une image contenant texte  Description générée automatiquement |

***Propriété :***

Soit une droite de vecteur normal .

Alors une équation cartésienne de s’écrit :

Réciproquement :

Si et ne sont pas tous les deux nuls simultanément, alors l’équation est l’équation d’une droite de vecteur normal .

* ***Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal***
* ***Énoncé***

Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite *d* passant par le point et dont un vecteur normal est le vecteur .

***Déterminer une équation cartésienne de la droite d.***

* ***Solution***

Comme est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme .

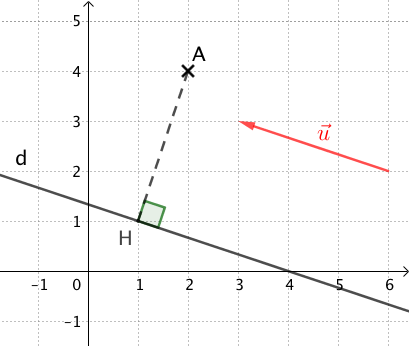
Le point appartient à la droite *d*, donc : et donc : .

Une équation cartésienne de *d* est : .

* ***Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d’un point sur une droite***
* ***Énoncé***

Soit la droite *d* d’équation : et le point de coordonnées

***Déterminer les coordonnées du point , projeté orthogonal de sur la droite d.***

* ***Solution***
* On commence par déterminer une équation de la droite  :

Comme *d* et sont perpendiculaires, un vecteur directeur de *d* est un vecteur normal de .

Une équation cartésienne de *d* est : ,

donc le vecteur est un vecteur directeur de *d*.

Et donc est un vecteur normal de .

Une équation de est de la forme : .

Or, le point appartient à , donc ses coordonnées vérifient l’équation de la droite.

On a : soit : .

Une équation de est donc : .

* H est le point d’intersection de *d* et , donc ses coordonnées vérifient les équations des deux droites.

Résolvons alors le système :

, soit , soit encore ,

soit enfin

et donc

Le point , projeté orthogonal de sur la droite *d*, a pour coordonnées .

* ***Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration***

|  |  |
| --- | --- |
| * ***Exemple 1 :***   Soit les points , et dans le plan rapporté à un repère orthonormé . Déterminer une équation de la hauteur issue de dans le triangle .   * ***Réponse :*** * est la droite perpendiculaire à la droite passant par .   Donc est un vecteur normal à la droite .  On a . Donc une équation de est :  . |  |

* On détermine en remplaçant et par les coordonnées du point qui est sur  :

Conclusion : a comme équation cartésienne :

* ***Exemple 2 :***

Une image contenant texte

Description générée automatiquement

* ***Réponse :***

