CHAPITRE 11 : Produit scalaire

CHAPITRE 11 : produit scalaire

1 Produit scalaire

1.1 Définition du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non nuls**,

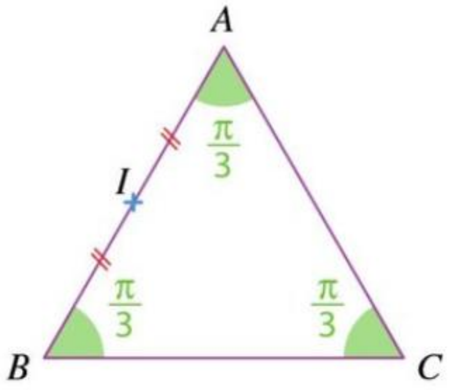
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

Si l'un des vecteurs est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à zéro :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{v} = 0$$

<u>Exemple :</u>

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.



Le triangle a pour côté 2 donc $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = 2$.

D'autre part $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc le produit scalaire :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 4 \times \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 2$$

1.2 Vecteurs colinéaires et carré scalaire

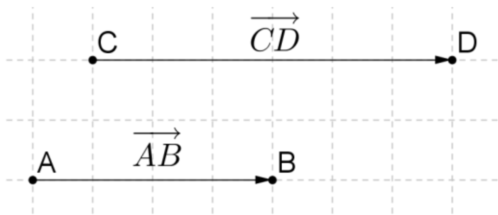
- Cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires et de **même sens** :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\| \times \boldsymbol{cos}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{CD}})$$

Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 0$ et $\cos(0) = 1$

Donc

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\|$$



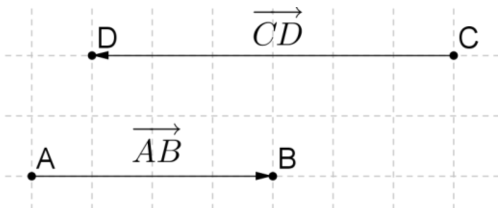
- Cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires et de **sens contraires** :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\| \times \boldsymbol{cos}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{CD}})$$

Or $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \pi$ et $\cos(\pi) = -1$

Donc

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = -\|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\|$$



Conclusion :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires et de sens contraires**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

Remarque :

Pour tous points A et B du plan : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

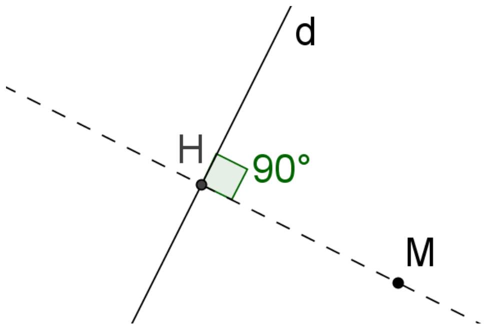
- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même est appelé **carré scalaire de $\vec{u}$** et est noté $\vec{u}^2$:

Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

1.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

Définition :

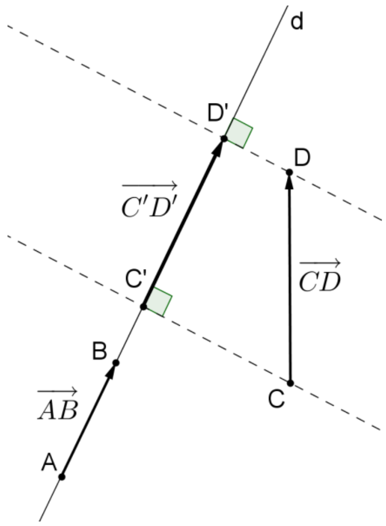
Le **projeté orthogonal H** d'un point M **sur une droite d** est le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite d passant par M avec la droite d.



Propriété :

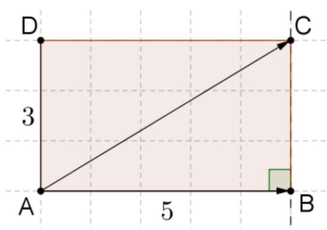
Soit les points A, B, C, et D, avec A et B distincts.
Soit C' et D' les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$



Conséquence :

Pour calculer un produit scalaire, on peut remplacer **l'un des deux** vecteurs par son projeté orthogonal **sur la direction de l'autre**.



Exemple :

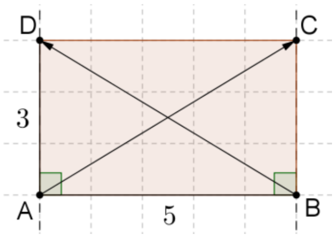
Dans le rectangle $ABCD$, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 25$$

Pour calculer un produit scalaire, <u>on ne peut pas</u> remplacer **les deux** vecteurs par leurs projetés orthogonaux **sur la direction d'un troisième**.



<u>Exemple :</u>

Dans le rectangle $ABCD$, <u>on n'a pas :</u>

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$$

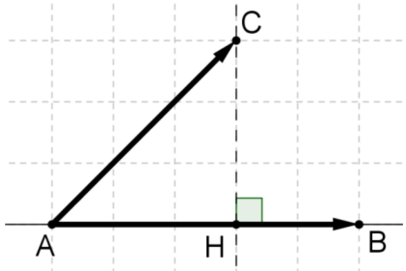
Mais on a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

<u>Propriété :</u>

Soit trois points A, B et C tels que A et B soient distincts.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)



Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$

<u>Démonstration :</u>

C'est un cas particulier de la propriété précédente car A a pour projeté lui-même.

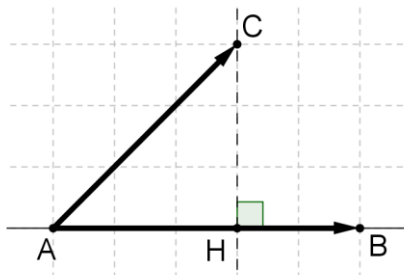
<u>Remarques :</u>

- Si H appartient à la demi-droite $[AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

Conséquence :

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **aigu**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$

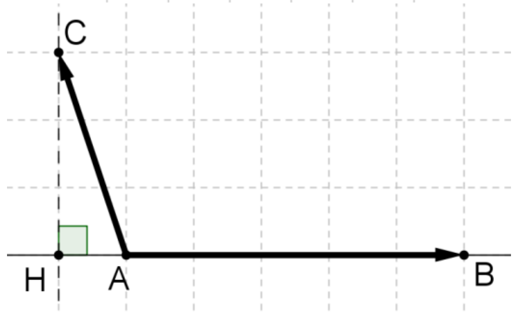


- Si H n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires, donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

Conséquence :

Si l'angle $\widehat{BAC}$ est **obtus**, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$



<u>Propriété :</u>

$\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{0}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

2 Propriétés du produit scalaire

2.1 Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

- Le produit scalaire est **symétrique** :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

- Le produit scalaire est **linéaire à droite** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels k_1 et k_2 on a :

$$\vec{u}.(k_1\vec{v} + k_2\vec{w}) = k_1\vec{u}.\vec{v} + k_2\vec{u}.\vec{w}$$

- Le produit scalaire est **linéaire à gauche** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels k_1 et k_2 on a :

$$(k_1\vec{u} + k_2\vec{v}).\vec{w} = k_1\vec{u}.\vec{w} + k_2\vec{v}.\vec{w}$$

<u>Exemples :</u>

$$(3\vec{u} + 2\vec{v}).\vec{w} = 3\vec{u}.\vec{w} + 2\vec{v}.\vec{w}$$

$$\vec{a}.\left(3\vec{b} - 5\vec{c}\right) = 3\vec{a}.\vec{b} - 5\vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{s}.\left(3\vec{s} + 8\vec{t}\right) = 3\vec{s}^2 + 8\vec{s}.\vec{t} = 3\|\vec{s}\|^2 + 8\vec{s}.\vec{t}$$

2.2 Produit scalaire dans une base orthonormée

Soit une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors :

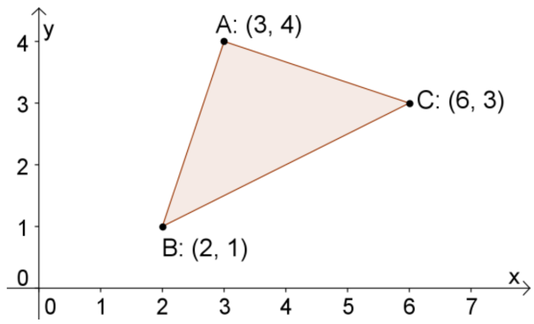
$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée du plan signifie que $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1$.

<u>Exemple</u>

Soit trois points $A(3;4)$, $B(2;1)$ et $C(6;3)$ dans un repère orthonormé.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.



Réponse :

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$. Donc ABC est isocèle en A.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)(3) + (-3)(-1) = 0$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc ABC est rectangle en A.

2.3 Norme et produit scalaire

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a, d'après la remarque du §1.2 :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$

et donc :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

Ainsi :

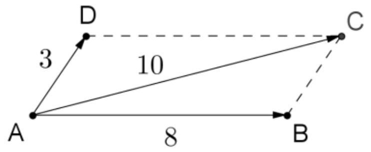
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}.\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$$

Exemples :

- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$



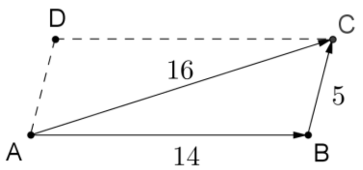
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 3^2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{27}{2}$$

- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(16^2 - 14^2 - 5^2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{35}{2}$$

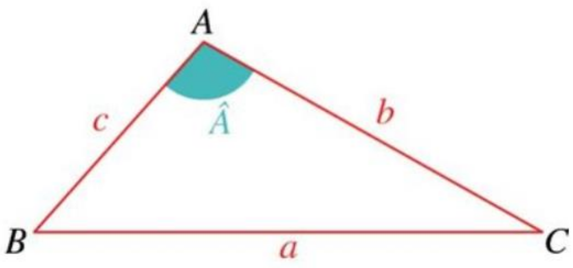
3 Applications du produit scalaire

3.1 Formule d'Al-Kashi

Al-Kashi : Mathématicien Perse du début du $15^{ème}$ siècle.

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Applications :

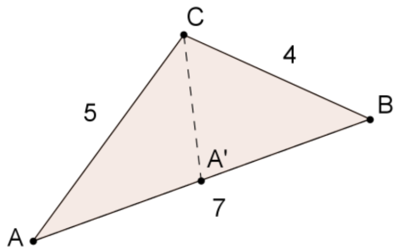
Cette formule permet de calculer les angles connaissant les trois côtés.

Exemple :

Calculer l'angle $\hat{A}$.

Réponse :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$2bc\cos\hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 7}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 7}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{29}{35}$$
$$\hat{A} = \cos^{-1}\frac{29}{35}$$
$$\hat{A} \approx 34{,}05°$$



3.2 Cercle défini par un diamètre

Propriété :

Un point $M(x\,;y)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ et seulement si :

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple :

Soit les points $A(1\,;2)$ et $B(-2\,;\,3)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

Réponse :

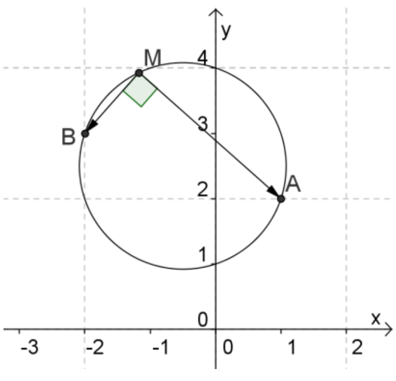
- $M(x\,;y)\ \in\ C$

équivaut successivement à :

- $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2-x\\3-y\end{pmatrix}$

- $(1-x)(-2-x) + (2-y)(3-y) = 0$
- $-2 - x + 2x + x^2 + 6 - 2y - 3y + y^2 = 0$
- $x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0$



Conclusion : Le cercle C de diamètre $[AB]$ a comme équation $\boxed{x^2 + y^2 + x - 5y + 4 = 0}$

3.3 Equation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal

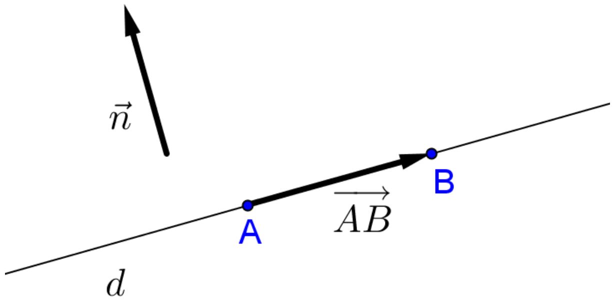
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Définition :

Un vecteur normal à une droite d est **un vecteur non nul et orthogonal** à tout vecteur directeur de d.

Exemple :

$\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite d



Propriétés :

Soit d une droite et soit $\vec{n}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à d, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.
- Tout vecteur normal à d est orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Propriété :

Soit d une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

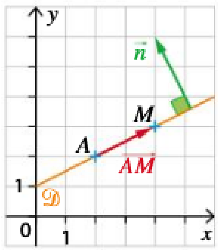
Un point M appartient à d si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Exemple :

Soit d la droite passant par le point $A(1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1\,;3)$.
Soit le point $B(4\,;3)$.

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (4-1)\times(-1) + (3-2)\times 3 = -3+3 = 0$$

Le point B appartient donc à d.



Propriété :

Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$.

Alors une équation cartésienne de d s'écrit :

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + c = 0$$

Réciproquement :

Si a et b ne sont pas tous les deux nuls simultanément, alors l'équation $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + c = 0$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Solution

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x-y+c=0$.
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3\times(-5)-4+c=0$ et donc : $c=19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x-y+19=0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

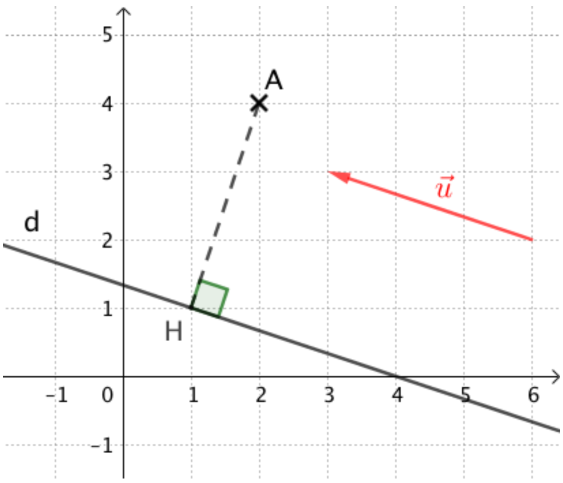
Énoncé

Soit la droite *d* d'équation : $x+3y-4=0$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,4)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite d.

Solution

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :



Comme *d* et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de *d* est un vecteur normal de (AH).

Une équation cartésienne de *d* est : $x+3y-4=0$,
donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *d*.
Et donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme : $-3x+y+c=0$.

Or, le point $A(2\,;\,4)$ appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3\times 2+4+c=0$ soit : $c=2$.
Une équation de (AH) est donc : $-3x+y+2=0$.

- H est le point d'intersection de *d* et (AH), donc ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les équations des deux droites.
  Résolvons alors le système :

$\begin{cases}x+3y-4=0\\-3x+y+2=0\end{cases}$, soit $\begin{cases}x=-3y+4\\-3(-3y+4)+y+2=0\end{cases}$, soit encore $\begin{cases}x=-3y+4\\10y-10=0\end{cases}$,

soit enfin

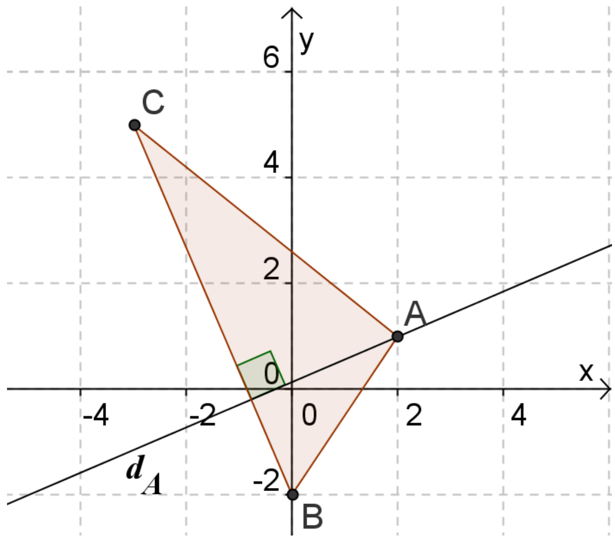
$\begin{cases}x=-3y+4\\y=\frac{10}{10}=1\end{cases}$ et donc $\begin{cases}x=-3\times1+4\\y=1\end{cases}$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*, a pour coordonnées $(1\,;\,1)$.

- ## *Méthode : Utiliser un repère pour étudier une configuration*

- ***Exemple 1 :***

Soit les points $A(2\,;1)$, $B(0\,;\,-2)$ et $C(-3\,;5)$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer une équation de la hauteur d_A issue de A dans le triangle ABC.



- ***Réponse :***
  - d_A est la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par A.

Donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3-0\\5-(-2)\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d_A.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{7}\end{pmatrix}$. Donc une équation de d_A est :

$\mathbf{-3}x+\mathbf{7}y+c=0.$

- On détermine c en remplaçant x et y par les coordonnées du point $A(2\,;1)$ qui est sur d_A :

$-3(2)+7(1)+c=0$

$c=3\times 2-7\times 1$

$c=-1$

<u>Conclusion :</u> d_A a comme équation cartésienne : $\boxed{-3x+7y-1=0}$

- ***Exemple 2 :***

CAPACITÉ 6

Utiliser un repère pour étudier une configuration

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(–1 ; 2), B(6 ; 1) et D(8 ; 5).

1. a. Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB].
   b. Déterminer une équation de la médiatrice d_1 du segment [AB].
2. Déterminer une équation de la médiatrice d_2 du segment [BD].
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection K de d_1 et d_2.
4. Justifier que le point K appartient à la médiatrice du segment [AD].
5. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABD, c'est-à-dire du cercle de centre K passant par les points A, B et D.
6. On considère la droite d perpendiculaire à (DK) passant par D.
Montrer de deux façons différentes que la droite d et le cercle $\mathscr{C}$ n'ont qu'un point commun.
d est appelée tangente au cercle $\mathscr{C}$ en D.

- ***Réponse :***

Solution commentée

1 **a.** $I\left(\frac{-1+6}{2}\,;\,\frac{2+1}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

b. La médiatrice de [AB] est perpendiculaire à (AB).

Elle a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}(7\,;-1)$ et une équation de d_1 est de la forme $7x - y + c = 0$.

Or, I est un point de d_1 donc $7 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + c = 0$, soit $16 + c = 0$, donc $c = -16$.

d_1 a pour équation $7x - y - 16 = 0$.

2 d_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{BD}(2\,;4)$. Le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}(1\,;2)$ est un autre vecteur normal à d_2.

Une équation de d_2 est donc de la forme $x + 2y + c = 0$.

Or, le milieu J(7 ; 3) de [BD] est un point de d_2, donc $7 + 2 \times 3 + c = 0$, soit $13 + c = 0$, donc $c = -13$.

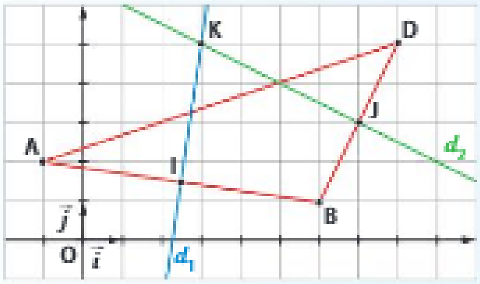
d_2 a pour équation $x + 2y - 13 = 0$.

3 Les coordonnées $(x\,;y)$ de K vérifient le système $\begin{cases} 7x - y - 16 = 0 \\ x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = 7x - 16 \\ x + 2(7x - 16) - 13 = 0 \end{cases}$, soit à $\begin{cases} y = 7x - 16 \\ 15x - 45 = 0 \end{cases}$

Par conséquent, $x = 3$ et $y = 7 \times 3 - 16 = 5$.

Les coordonnées de K sont (3 ; 5).



4 K appartient à la médiatrice de [AB] donc KA = KB.

K appartient à la médiatrice de [BD] donc KB = KD.

Par conséquent, KA = KD et K appartient à la médiatrice de [AD].

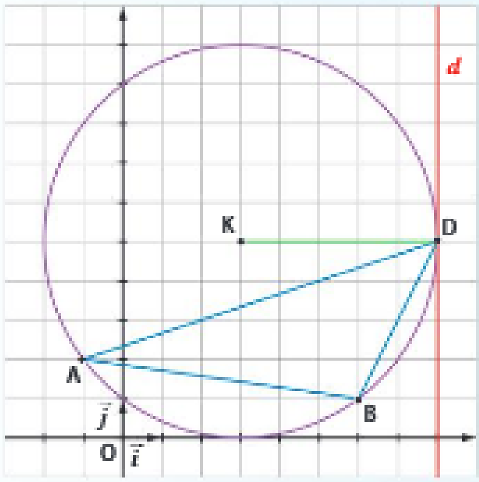
5 Le cercle circonscrit au triangle ABD a pour rayon KA.

$KA = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Une équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Cette équation peut s'écrire $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.



6 **Première méthode :** Soit E un point de d distinct de D.

Le triangle KED est rectangle en D donc son hypoténuse [KE] vérifie KE > KD, ce qui prouve que E n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

D est donc l'unique point d'intersection de d et $\mathscr{C}$.

Deuxième méthode : On détermine une équation de la droite d.

Un vecteur normal à d est $\overrightarrow{KD}\,(5\,;0)$.

Une équation de d est donc de la forme $5x + c = 0$.

Le point D appartient à d donc $8 \times 5 + c = 0$, soit $c = -40$.

Une équation de d est $5x - 40 = 0$, soit $x - 8 = 0$.

On cherche les points communs à d et à $\mathscr{C}$, donc les points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x - 8 = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} (8-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x = 8 \end{cases}$ et donc à $\begin{cases} (y-5)^2 = 0 \\ x = 8 \end{cases}$, soit $x = 8$ et $y = 5$.

Ce sont les coordonnées du point D. Il n'y a donc qu'un point d'intersection qui est D.

Conseil

Pour montrer l'unicité d'un point d'intersection, on peut mener un raisonnement par l'absurde, ou chercher les coordonnées de ce point de manière analytique.

Voir exercices 86 87